

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)



I problemi del secolo

Nel 1900 fu stilata una lista di 23 importanti problemi di matematica, di cui uno è ancora del tutto aperto

«**C**hi non sarebbe felice di poter sollevare il velo dietro cui si nasconde il futuro, per gettare uno sguardo ai progressi della matematica e ai segreti del suo sviluppo nei secoli a venire?» Così parlò David Hilbert l'8 agosto 1900 a Parigi, inaugurando il secondo Congresso internazionale dei matematici con una lista di 23 problemi aperti, che dovevano indirizzare la ricerca nel nuovo secolo. Al sommo della lista stava la cosiddetta ipotesi del continuo, proposta da Georg Cantor nel 1878: dato un insieme infinito di numeri reali, è sempre possibile metterlo in corrispondenza biunivoca o con l'insieme di tutti i numeri reali, o con l'insieme di tutti i numeri interi. In altre parole, non esiste un infinito intermedio fra quelli dei numeri interi e dei numeri reali.

Naturalmente Hilbert pensava che i problemi avessero semplicemente una soluzione, positiva o negativa. L'aveva eloquentemente affermato con un motto che venne poi inciso sulla sua tomba: *Wir müssen wissen, wir werden wissen*, «dobbiamo sapere, e sapremo». Invece, Kurt Gödel e Paul Cohen diedero una sorprendente soluzione al problema dell'ipotesi del continuo. Nel 1938 il primo dimostrò che non la si può refutare. E nel 1963 il secondo dimostrò che non la si può nemmeno provare. In altre parole, il problema è indecidibile, e la matematica si biforca: una strada può perseguire le conseguenze dell'ipotesi del continuo, e l'altra quella della sua negazione. O meglio, quelle delle sue negazioni, visto che c'è un unico modo di soddisfare l'ipotesi di Cantor, ma ce ne sono molti di falsificarla.

Un milione in palio

Gli altri 22 problemi enunciati da Hilbert sono stati in buona parte risolti, almeno parzialmente, ma uno rimane clamorosamente aperto: l'ipotesi di Riemann, che era all'ottavo posto della lista. Hilbert non lo considerava

né il più importante, né il più difficile, e pensava che sarebbe stato risolto durante la sua vita.

Invece è entrato a far parte della lista dei sette problemi del millennio annunciati dall'Istituto Clay il 24 maggio 2000, insieme all'offerta di un premio di 1 milione di dollari per la soluzione di ciascuno di essi. La lista degli argomenti è corta, ma variegata: la teoria dei numeri e la geometria algebrica, la fluidodinamica e la teoria dei campi quantistici, la complessità di calcolo. E il *background* per capirli è fornito da Keith Devlin nel bel libro *I problemi del millennio* (Longanesi, 2004).

Riemann il più importante

Per ora, uno solo dei sette è stato risolto: la congettura di Poincaré, proposta nel 1904 da Henri Poincaré, l'*alter ego* di Hilbert, e dimostrata nel 2003 da Grigori Perelman. Si trattava di caratterizzare topologicamente l'ipersfera nello spazio a quattro dimensioni, e la soluzione valeva non solo il milione di dollari messi in palio, ma anche la medaglia Fields. Perelman ha vinto e rifiutato sia il milione che la medaglia, ed è scomparso dalla circolazione avvolto dal mistero. La sua storia è raccontata in tre libri: *La congettura di Poincaré* (Rizzoli, 2007) di Donal O'Shea, *L'enigma di Poincaré* (Apogeo, 2008) di George Szpiro e *Perfect rigor* (Carbonio Editore, 2018) di Masha Gessen.

L'ipotesi di Riemann è il più importante dei sei problemi che rimangono aperti, ma potrebbe finire anch'essa come l'ipotesi del continuo. Quasi tutti gli esperti pensano che sia vera. E lo sperano, per gli importanti risultati che ne derivano. Ma anche la sua falsità potrebbe avere conseguenze interessanti. Per esempio, nel 1983 Roger Heath-Brown ha dimostrato che, se ci fossero infiniti zeri della funzione di Riemann sull'asse orizzontale e vicini a 1, allora ci sarebbero anche infiniti primi gemelli. Si risolverebbe così un altro dei grandi problemi aperti della matematica.