di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Il teorema dell'anno

Un problema rimasto oltre un secolo senza soluzione, di colpo quest'anno ne ha ottenute un'infinità

Nel 1900 Hilbert chiese, nella prima parte del suo *diciottesimo problema*, se in qualunque dimensione il numero dei gruppi finiti di simmetria fosse sempre finito. Nel 1910 Ludwig Bieberbach rispose affermativamente, ma senza dare una formula esplicita per calcolare il numero dei gruppi finiti di simmetria per ciascuna dimensione. Ancora oggi non esiste una tale formula, benché si conosca qualche valore particolare. Per esempio, ci sono esattamente 7, 17 e 230 gruppi finiti di simmetria negli spazi a uno, due e tre dimensioni, corrispondenti ai possibili tipi di *greche*, *mosaici* e *cristalli*.

Mentre la prima parte del diciottesimo problema di Hilbert riguardava i possibili modi simmetrici di tassellare gli spazi multidimensionali, la seconda parte chiedeva se esistesse un unico tassello in grado di tassellare l'intero spazio tridimensionale, ma solo in maniera *asimmetrica*: cioè, senza usare il tassello sempre nello stesso modo. Questa volta la risposta positiva fu data nel 1935 da Heinrich Heesch, e un esempio di soluzione dell'analogo problema nel piano è *Fantasmi* (1971) di Escher.

Richiesta più esigente

Una richiesta più esigente, fatta nel 1961 da Hao Wang, consisteva nel trovare insiemi di piastrelle in grado di pavimentare il piano solo in modo *aperiodico*: cioè, senza mai ripetere all'infinito una stessa configurazione. Nel 1966 Robert Berger risolse il problema, con un esempio consistente di ben 20.426 piastrelle diverse. Presto si trovarono però soluzioni sempre più piccole, e nel 1974 Penrose mostrò che potevano bastare due piastrelle.

Le piastrelle di Penrose lasciavano aperta la possibilità che esistesse un'unica piastrella in grado di pavimentare il piano solo in maniera aperiodica. Il dilemma divenne noto come il *problema di Einstein*, anche se il nome dello scienziato era solo un'esca per attirare l'attenzione sul problema. In realtà, in tedesco *ein Stein* significa «una pietra», e si può intendere anche come «un tassello».

Per trovare la singola piastrella ci è voluto mezzo secolo. Alla fine i matematici sono stati beffati da un dilettante, David Smith, che lo scorso anno ha trovato una banale piastrella poligonale, a forma a «cappello». Questa piastrella gli sembrava appunto in grado di pavimentare il piano solo in maniera aperiodica.

Un'infinità di infinità

I professionisti hanno avuto però la rivincita quando Smith ha dovuto rivolgersi a Craig Kaplan, Joseph Myers e Chaim Goodman-Strauss per verificare le proprie intuizioni. A marzo di quest'anno i quattro hanno annunciato che in effetti il «cappello» può pavimentare il piano solo in modo aperiodico, ma non da solo: serve anche la sua versione speculare.

Questo era un progresso, rispetto alle due piastrelle di forma diversa di Penrose, ma non era ancora la soluzione definitiva. Infatti, si usavano comunque due piastrelle, benché di forma uguale. O, se si preferisce, si usava una sola piastrella, ma in due modi diversi. Nel maggio scorso i quattro hanno però risolto anche quest'ultimo problema, trasformando il «cappello» in uno «spettro», ottenuto curvando i lati del poligono in maniera da ottenere una piastrella chirale: diversa, cioè, dalla sua immagine speculare.

In realtà, di «spettri» ne sono apparsi due: uno destrorso e uno sinistrorso. E ciascuno è risultato in grado di pavimentare il piano solo in maniera aperiodica, senza bisogno dell'altro. Inoltre, per buona misura, le due soluzioni sono risultate flessibili, nel senso che piccole variazioni di ciascuna ne provocano infinite altre. Così, un problema che fino ad allora non aveva avuto nessuna soluzione, di colpo quest'anno ne ha ottenute un'infinità. Anzi, una doppia infinità!