di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

La musica dei numeri primi

Un'ipotesi ancora indimostrata su questi numeri continua ad affascinare e impegnare i matematici

Il giorno di Natale del 1849 Carl Gauss rivelò, in una lettera all'astronomo Johann Encke, di aver congetturato il teorema dei numeri primi nel 1792 o 1793, quando aveva 15 o 16 anni. Raccontò di aver diviso i numeri interi in blocchi, e di essersi accorto che i numeri primi decrescevano in maniera logaritmica. Per esempio, ci sono 25 numeri primi fino a 100, 168 fino a 1000, 1229 fino a 10.000, e 9592 fino a 100.000. Dunque, ce ne sono approssimativamente $10^n/2n$. Usando i logaritmi naturali invece di quelli decimali, si elimina il fattore 2 a denominatore, e si può dunque congetturare che il numero $p(n)$ dei primi fino a n tende sempre più a comportarsi come $n/\ln n$.

Benché il problema della frequenza dei numeri primi riguardi i numeri interi n, l'uso dei logaritmi e delle frazioni fa intervenire i numeri reali x. Tanto vale allora considerare il numero $p(x)$ dei primi fino a x, che si può visualizzare come una scala a gradini orizzontali, le cui alzate unitarie sono poste in corrispondenza dei numeri primi.

Zeta, la funzione

Fin dagli inizi dell'Ottocento, grazie all'analisi armonica di Jean-Baptiste Joseph Fourier, si sapeva che quasi tutte le funzioni, comprese quelle a gradino, si possono scomporre in serie trigonometriche, allo stesso modo in cui i suoni si possono decomporre in sovrapposizioni di armoniche. Per poter scomporre la $p(x)$, però, bisognerebbe prima saperla esprimerle analiticamente. Nel 1859, nello storico lavoro sul numero dei numeri primi minori di una data quantità, Bernhard Riemann si propose di fare il contrario: cioè, di isolare una serie di armoniche, la cui somma facesse risuonare la funzione a gradino dei numeri primi, trovandone così un'espressione analitica.

Il suo punto di partenza fu un'intuizione di Eulero del 1737, che legava la serie armonica degli inversi dei numeri interi n al prodotto delle somme degli inversi delle potenze dei numeri primi p. E già Eulero aveva esteso la serie armonica dagli interi n alle loro potenze n^s, ottenendo una funzione a cui Riemann diede il nome «zeta greco»: $\zeta(s)=\Sigma_n 1/n^s$.

$\zeta(1)$ è appunto la serie armonica, il cui valore è infinito. Eulero notò che la funzione ζ è invece definita per tutti i numeri reali s maggiori di 1, e ne calcolò i valori per tutti gli argomenti interi pari: per esempio, $\zeta(2)$ è la somma degli inversi dei quadrati, e vale $\pi^2/6$. Più in generale, Riemann notò che la funzione ζ è definita per tutti i numeri complessi con parte reale maggiore di 1. Poi mostrò come estenderla, attraverso la cosiddetta continuazione analitica, a tutti i numeri complessi diversi da 1. E ne calcolò i valori per vari argomenti interi negativi: per esempio, $\zeta(-1)$ è la somma degli interi, e vale $-1/12$. $\zeta(-2)$ è invece la somma dei quadrati degli interi: vale 0, e lo stesso accade per tutti i valori $\zeta(-2n)$. Riemann dimostrò che tutti gli altri infiniti zeri della funzione ζ stanno nella striscia verticale compresa fra 0 e 1, e congetturò che stessero tutti sulla retta verticale passante per 1/2.

Nella divulgazione

Nel 1895 Hans von Mangoldt dimostrò che per ottenere il teorema dei numeri primi bastava escludere che ci fossero zeri sulla retta verticale passante per 1, cosa che fecero Jacques Hadamard e Charles de la Vallée Poussin nel 1896. Il loro teorema prova che la funzione $p(x)$ tende sempre più a comportarsi come $x/\ln x$, come intuito da Gauss.

L'ipotesi di Riemann rimane invece indimostrata, e costituisce la massima sfida della matematica moderna. La descrivono in maniera divulgativa *L'enigma dei numeri primi* di Marcus de Sautoy (Rizzoli, 2004) e *L'ossessione dei numeri primi* di John Derbyshire (Bollati Boringhieri, 2015).