di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

La coda curva del pianoforte

Dipende dal legame tra la lunghezza delle corde e l'altezza delle note, che chiama in causa i logaritmi

Perché i pianoforti a coda hanno una forma curva? E di quale curva si tratta? La risposta a entrambe le domande è che, per aumentare di un'ottava il suono prodotto da una corda vibrante, bisogna dimezzarne la lunghezza. Poiché un normale pianoforte ha un'estensione di circa sette ottave, la corda all'estremo sinistro dovrebbe dunque essere di circa $2^7 = 128$ volte più lunga di quella all'estremo destro, e le altre dovrebbero decrescere esponenzialmente fra i due estremi. I condizionali sono d'obbligo, visto che se la corda più corta è di circa dieci centimetri, la più lunga dovrebbe essere di quasi 13 metri. Le corde delle prime cinque ottave possono in effetti crescere da destra a sinistra in modo esponenziale, da dieci centimetri a circa tre metri, ma per le ultime due ottave si interviene sulla massa anziché sulla lunghezza; le corde sono dunque ispessite gradualmente, mantenendo circa la stessa lunghezza.

Trasformare per semplificare

Il legame esponenziale tra lunghezza delle corde e altezza delle note era già noto ai pitagorici, che ne conoscevano anche la proprietà caratteristica: il fatto di trasformare l'esponenziale di una somma nel prodotto degli esponenziali. O, equivalentemente, il logaritmo di un prodotto nella somma dei logaritmi.

I pitagorici scoprirono, infatti, che agli intervalli di quinta (do-sol) e di quarta (sol-do) corrispondono i rapporti 3/2 e 4/3. E che alla somma dei due intervalli corrisponde il prodotto dei due rapporti: cioè, all'ottava (do-do) corrisponde il rapporto 2/1.

L'interesse pratico dei logaritmi è presto detto: poiché fare addizioni e sottrazioni a mano è facile e veloce, ma fare moltiplicazioni e divisioni è noioso e lento, è utile ridurre le due ultime operazioni alle prime due. Il primo tentativo fu il metodo dei quarti quadrati dei babilonesi, basato sull'osservazione che il prodotto xy è pari a un quarto della differenza tra $(x+y)^2$ e $(x-y)^2$. Così, per esempio, il milione di prodotti di numeri tra 1 e 1000 si riduce al calcolo dei 2000 quadrati dei numeri da 1 a 2000. Un tentativo più recente furono le formule di prostaferesi, il cui nome significa appunto «addizione (*prostesi*) e sottrazione (*aferesi*)», usate da astronomi e navigatori per tutto il Cinquecento. Che mostravano, per esempio, che il prodotto dei seni di x e y è pari a metà della differenza dei coseni di $x-y$ e $x+y$.

L'avvento dei logaritmi

Da inizio Seicento a metà Novecento i calcoli di matematici, fisici e ingegneri furono invece dominati dai logaritmi, incarnati nelle tavole logaritmiche e nei regoli calcolatori. Il concetto fu introdotto da Nepero nel *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) e perfezionato da Henry Briggs nell'*Arithmetica logaritmica* (1624), ed entrambi usarono versioni embrionali del calcolo infinitesimale.

Il passo cruciale per il calcolo moderno dei logaritmi lo fece Gregorio di San Vincenzo nell'*Opus geometricum* (1647), quando notò che l'area definita dall'iperbole $1/x$ ha la proprietà caratteristica del logaritmo. La sua osservazione fu, semplicemente, che a un incremento geometrico della variabile corrisponde un incremento aritmetico dell'area.

Col senno di poi, questo significa che l'integrale di $1/x$ è un logaritmo di x, che viene chiamato logaritmo naturale: lo si indica con $\ln x$, e la sua base e è il numero che determina un'area unitaria sotto l'iperbole. Per derivare un'espressione per il calcolo del logaritmo di $1+x$, basta allora sviluppare in serie di potenze la funzione $1/(1+x)$, e integrarla termine a termine. Si ottiene così la famosa serie pubblicata da Mercatore nella *Logarithmotechnia* (1668), e in particolare la notevole espressione:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$