di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

L'oceano dell'ignoranza

I numeri trascendenti, pur essendo ubiquitari, sono difficili da trovare, ed è arduo dimostrare che sono tali

Nel 1872 Georg Cantor dimostrò che i numeri reali sono «quasi tutti» trascendenti, nel senso che la maggior parte di essi non è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi. In altri termini, la probabilità che un numero reale scelto a caso sia trascendente è 1. Ma buona parte dei numeri scoperti e studiati dalla matematica sono invece algebrici: i numeri razionali, le radici n-esime dei numeri interi, i numeri costruibili con riga e compasso, e così via. Il fatto è che i numeri trascendenti sono per natura difficili da trovare. Il primo esempio esplicito fu costruito da Joseph Liouville nel 1844, ma era un numero artificiale, fatto apposta per non essere algebrico; era «quasi» un numero razionale, nel senso che si poteva approssimare bene mediante numeri razionali. Cosa invece impossibile per i numeri algebrici irrazionali.

Un lavoro di secoli

Simile, ma ancora più indiretta, era la dimostrazione di Cantor citata, che si limitava a enumerare i numeri algebrici, e a costruire con un *metodo diagonale* un numero che non fosse algebrico, perché diverso nella prima cifra decimale dal primo algebrico della lista, nella seconda cifra dal secondo, e così via.

Paradossalmente, non è solo difficile imbattersi in pratica in numeri trascendenti, nonostante la loro teorica ubiquità: è anche difficile dimostrare che sono trascendenti! Per esempio, π è stato scoperto nell'antichità, ma la sua irrazionalità fu dimostrata solo nel 1768 da Johann Lambert, e la sua trascendenza nel 1882 da Ferdinand von Lindemann.

Nel 1737 Eulero aveva già provato che e è irrazionale, ma ci volle un altro secolo e mezzo perché Charles Hermite dimostrasse nel 1873 che è trascendente. Ne segue che sono trascendenti anche e^2 e $\sqrt{e}$, e più in generale e^x, per ogni esponente razionale x diverso da 0. Il risultato di Lindemann è un'estensione di quello di Hermite a tutti gli esponenti algebrici, e ne derivano molte conseguenze.

Per esempio, quando x è algebrico il suo logaritmo dev'essere trascendente, perché $e^{\ln x}$ è uguale a x. E devono essere trascendenti anche il seno e il coseno di x, per la formula di Eulero che lega e^x alla loro somma. In particolare dev'essere trascendente anche π, perché altrimenti lo sarebbe $e^{i\pi}$, che invece è uguale a -1. Ma gli storici risultati di Hermite e Lindemann lasciarono aperte molte ovvie domande riguardanti la trascendenza, o anche solo l'irrazionalità, di numeri quali $e + \pi$, $e\pi$, e^π, π^e, e così via.

Una congettura sfuggente

Sicuramente i primi due non possono essere entrambi razionali, perché sono i coefficienti dell'equazione di secondo grado $(x - e)(x - \pi)$, che ha e e π come soluzioni: dunque, almeno uno dei due è irrazionale, ma non si sa se lo siano entrambi. Nel 1929 Alexandr Gelfond dimostrò invece la trascendenza di $e\pi$ con un metodo nuovo, rispetto a Hermite e Lindemann. Ma dopo quasi un secolo non si ancora se π^e sia almeno irrazionale.

Tutti questi problemi, e molti altri, verrebbero risolti dalla dimostrazione di una congettura proposta nei primi anni sessanta da Stephen Schanuel. In particolare, $e + \pi$, $e\pi$, e π^e sarebbero trascendenti, come ci si aspetta. E la formula di Eulero $e^{i\pi} + 1 = 0$ sarebbe l'*unica* relazione esistente tra i numeri e, π e i esprimibile in forma algebrica mediante le operazioni di somma, prodotto ed esponenziale.

Ma per ora la congettura di Schanuel sembra fuori dalla portata dei metodi disponibili. E la conclusione che si può trarre, parafrasando Newton, è che «i matematici sono solo fanciulli che giocano sulla riva del mare: ogni tanto trovano qualche bel sassolino o qualche bella conchiglia, mentre il grande oceano della verità si stende inesplorato dinanzi a loro».