di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Le variazioni Goldbach

Una congettura semplice da enunciare ma ardua da dimostrare ha ispirato più di un romanzo

A volte i problemi di matematica sono così semplici da enunciare che possono diventare protagonisti di romanzi di successo. È così, per esempio, in *Zio Petros e la congettura di Goldbach* (1992) di Apostolos Doxiadis, in cui si legge:

Mio zio mi disse: «Voglio che tu provi a dimostrare che ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi. *È ovvio per ogni caso particolare che tu consideri. Ma più i numeri crescono, e più calcoli richiedono. E comunque, poiché ci sono infiniti numeri, non si può affrontare il problema caso per caso. Devi dimostrarlo in generale, e temo che questo sia più difficile di quel che pensi».*

Il problema proposto è la congettura di Goldbach che dà il titolo al romanzo, chiamata così perché fu proposta da Christian Goldbach in una lettera a Eulero del 7 giugno 1742. Se la congettura è vera, Zio Petros ha ragione a dire che una verifica caso per caso non potrebbe dimostrarla. Ma lo zio non sembra capire che, se invece fosse falsa, la stessa verifica potrebbe refutarla, trovando un controesempio. In particolare, la congettura di Goldbach non può essere uno dei problemi indecidibili di cui Gödel ha dimostrato l'esistenza nel 1931. Anche se, nel romanzo, Zio Petros smette di lavorarci proprio perché ossessionato da questa supposta possibilità.

Versioni forti e deboli

Già Goldbach aveva notato che la congettura si può riformulare dicendo che «ogni numero maggiore di 5 è la somma di tre numeri primi». In una direzione, dato un numero dispari maggiore di 5, basta togliergli il numero primo 3 per ottenere un numero pari maggiore di 2, che è somma di due primi. Questi due, sommati a 3, danno il numero di partenza. Nell'altra direzione, dato un numero pari maggiore di 2, basta aggiungergli 2 per ottenere un numero pari maggiore di 5, che è somma di tre primi. Ma almeno uno di questi dev'essere 2, altrimenti la somma sarebbe dispari. E allora il numero pari di partenza è uguale alla somma degli altri due primi.

Una forma più debole della congettura dice che «ogni numero dispari maggiore di 5 è la somma di tre numeri primi», ed è stata dimostrata nel 2013, dopo un secolo di sforzi.

Per passi successivi

Il primo passo fu compiuto nel 1923 da Godfrey Hardy e John Littlewood, ma il loro risultato aveva due grossi nei: l'uso di una versione dell'ipotesi di Riemann; e la restrizione a «quasi tutti» i numeri dispari, cioè, quelli maggiori di un numero enorme, non ben determinato. Il primo neo fu eliminato nel 1937 da Ivan Vinogradov, che dimostrò la congettura senza l'ipotesi di Riemann. Ma solo per tutti i numeri dispari maggiori di $3^{3^{15}}$, che è un numero con quasi sette milioni di cifre.

Il secondo neo fu invece eliminato nel 1997 da quattro matematici, che usarono l'ipotesi di Riemann per dimostrare un risultato analogo, per tutti i numeri dispari maggiori di 10^{20}. Questo numero di sole 21 cifre era più maneggevole di quello di Vinogradov, e la sua relativa piccolezza permise di controllare tutti i numeri inferiori al computer. Infine, nel 2013 il peruviano Harald Helfgott è riuscito a eliminare entrambi i nei, dimostrando così la forma debole della congettura. La forma forte originale rimane aperta: vari risultati analoghi ai precedenti mostrano che le eccezioni sono relativamente poche, ma non così poche da poterle per ora escludere con il computer.

L'unica dimostrazione completa nota è quella del romanzo *Il teorema del pappagallo* (1998) di Denis Guedj. L'ha trovata un matematico amazzonico, che si suicida senza averla pubblicata. Ma il suo pappagallo l'ha imparata a memoria, e la tramanda ai suoi simili nella foresta.