di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Variazioni sulle costanti

Circa un secolo fa, un misconosciuto matematico spagnolo estese la nozione di derivata ai numeri interi

Le derivate misurano il tasso di cambiamento. E poiché tutto ciò che è costante non cambia, le derivate delle costanti sono tutte nulle. Peccato, perché questo sembra impedire l'uso dei metodi dell'analisi matematica nello studio dell'aritmetica.

O almeno, sembrava impedirlo fino al 1911, quando il misconosciuto matematico spagnolo José Shelly pubblicò *Una questione della teoria dei numeri*, in cui la nozione di derivata analitica di una funzione reale veniva estesa alla nozione di *derivata aritmetica* di un numero intero.

L'idea di Shelly era un vero uovo di Colombo, e si basava sulla decomposizione in fattori primi dei numeri interi. Basta infatti porre le derivate dei numeri primi uguali a 1, ed estendere la definizione ai prodotti di numeri mediante un analogo della formula di Leibniz per la derivata del prodotto di funzioni. Più precisamente, basta definire $D(p) = 1$ e $D(mn) = mD(n) + nD(m)$.

Domande all'apparenza innocue

In base a queste definizioni, la derivata del prodotto di due primi è uguale alla loro somma. E la derivata di una potenza di un numero primo è l'analogo della derivata di un monomio. Per esempio, la derivata di p^3 è $3p^2$.

Più in generale, la derivata di un intero è pari al prodotto del numero stesso per la somma degli inversi dei suoi fattori primi, ciascuno moltiplicato per il corrispondente esponente. Per esempio, la derivata di 200 è 380: cioè, 200 per la somma di 3/2 e 2/5.

Gli unici numeri che sono uguali alla propria derivata sono i numeri primi elevati a se stessi: 4, 27, 3125, e così via. In questo contesto, la funzione p^p è dunque un analogo di e^x nell'analisi.

Gli unici numeri interi che non si possono derivare in base alle regole precedenti sono 0 e 1, perché non sono decomponibili in fattori primi. Per convenzione la loro derivata viene posta uguale a 0, e ne segue che la derivata seconda di qualunque numero primo è nulla. Ma 0 e 1 sono gli unici interi che abbiano derivata uguale a 0. Mentre i numeri primi sono gli unici interi che abbiano derivata uguale a 1.

Sembra tutto molto banale, finché non ci si comincia a fare domande solo apparentemente innocue. Anzitutto, la derivata di un intero non può mai essere uguale a 2. Infatti, è uguale a 1 per i numeri primi, ed è maggiore di 2 per i numeri con almeno due fattori primi.

Tutt'altro che banale

Un caso semplice è il prodotto pq di due numeri primi p e q. In tal caso, per definizione, la derivata è pari alla somma $p + q$. E se entrambi i primi sono dispari, cioè diversi da 2, la loro somma è pari: ciò significa che la derivata di un intero può prendere qualche valore pari. Ma può prenderli tutti, a parte ovviamente 2? Sì, se è vera la congettura di Goldbach: cioè, se ogni numero pari maggiore di 2 è uguale alla somma di due numeri primi.

Un altro caso semplice è quello del doppio $2p$ di un numero primo p. In tal caso, sempre per definizione, la derivata è pari alla somma $p + 2$: ciò significa che la derivata può prendere infiniti valori dispari. Ma non può prenderli tutti: per esempio, il valore 3 è impossibile.

Quanto alla derivata seconda, può essere uguale a 1. Infatti, così accade per il doppio del numero primo p, quando anche $p + 2$ è primo. Ma succede infinite volte? La risposta è affermativa, se è vera la congettura dei numeri primi gemelli: cioè, se esistono infiniti numeri primi p, tali che anche $p + 2$ è primo.

Il legame tra alcuni ovvi problemi sulla derivata aritmetica e due famose congetture di teoria dei numeri mostra che l'argomento non è affatto banale, come poteva invece sembrare a prima vista. E infatti è stato ampiamente studiato, come prova il volume di 300 pagine *La derivata aritmetica* (Hoepli, 2013) di Giorgio Balzarotti e Paolo Lava.