di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

La perfezione dei numeri interi

I due più antichi problemi aperti della matematica riguardano i cosiddetti numeri perfetti

A un *outsider*, la matematica moderna può dare l'impressione che le nozioni di cui essa si interessa stiano diventando sempre più astruse e astratte, e che le difficoltà dei suoi problemi aperti derivino appunto dall'astrusità e dall'astrattezza di queste nozioni. Sicuramente questo è vero, almeno in parte, ma non bisogna dimenticare che l'astrazione è per definizione un processo che parte dal concreto.

Nel caso della matematica moderna, molte sue nozioni astruse e astratte si sono appunto evolute a partire da quelle semplici e concrete degli antichi. E sarebbe ingenuo pensare che si sia andati avanti soltanto quando non c'era più niente da sapere sulle nozioni classiche. E che non esistano più problemi aperti al loro riguardo, perché esse sono ormai state completamente comprese. L'esempio più ovvio di un vasto territorio classico che non è stato affatto conquistato, e in cui rimangono aperti molti fronti, è la teoria dei numeri: un'area in cui abbondano problemi come l'ultimo teorema di Fermat, che sono facilissimi da enunciare e difficilissimi da risolvere.

La somma dei divisori

I due più antichi problemi aperti della matematica riguardano appunto i numeri interi. In particolare, i *numeri perfetti*, che già i pitagorici avevano definito come quei numeri che sono uguali alla somma dei loro divisori, escluso il numero stesso, e inclusa l'unità. Per esempio, è perfetto 6, che è la somma di 1, 2 e 3. E lo sono anche 28, 496 e 8128, che erano gli unici numeri perfetti noti agli antichi.

Filone Giudeo, un filosofo ebreo del primo secolo, sostenne in *La creazione del mondo* che Dio creò il mondo in 6 giorni, e che la Luna gira attorno alla Terra in 28 giorni, proprio perché i numeri 6 e 28 sono perfetti. E questa posizione venne condivisa agli inizi del V secolo dal vescovo cristiano Agostino, in *La città di Dio*.

Secoli prima, il matematico greco Euclide aveva già osservato, nella proposizione IX.36 degli *Elementi*, qualcosa di molto più interessante. Il fatto, cioè, che se $2^{n+1} - 1$ è primo allora $2^n (2^{n+1} - 1)$ è perfetto. La verifica è praticamente immediata, ed è appunto ciò che succede con i numeri 6, 28, 496 e 8128.

Molto meno immediato è provare che i numeri perfetti pari sono esattamente quelli del tipo trovato da Euclide. Nel 1737 Eulero confermò che è effettivamente così. La sua dimostrazione sfrutta un procedimento che lui stesso aveva già usato in precedenza per dimostrare che i numeri primi sono infiniti, e che avrebbe portato in seguito alla formulazione dell'ipotesi di Riemann.

Uno stretto legame

I numeri perfetti pari sono dunque strettamente legati ai numeri primi del tipo $2^m - 1$, detti *primi di Mersenne*. Attualmente, il più grande primo di Mersenne conosciuto è $2^{82.589.933} - 1$, da cui si può ricavare il più grande numero perfetto conosciuto: il cinquantunesimo, per la precisione. Ma rimane un problema aperto se ci siano *infiniti numeri perfetti pari*. O, equivalentemente, se ci siano infiniti numeri primi di Mersenne.

Inoltre, resta aperto un secondo problema: se ci siano o no *numeri perfetti dispari*. Così sembrerebbe, almeno stando a *5 è il numero perfetto*: un fumetto e un film di Igor Tuveri, rispettivamente del 2002 e del 2019. Ma entrambe le opere intendono la perfezione del numero 5 in senso artistico, non matematico.

Se veramente ci sono numeri dispari perfetti, in teoria si potrebbe trovarne uno mediante una ricerca esaustiva, ovviamente al calcolatore. In pratica, però, tutto dipende da quanto grande sia il più piccolo numero perfetto dispari: sicuramente, più di 10^{1500}. Se la risposta fosse invece negativa, i risultati congiunti di Euclide ed Eulero caratterizzerebbero allora completamente i numeri perfetti.