di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Giochi proibiti

I Greci impararono a costruire molti poligoni regolari con riga e compasso, ma per alcuni la sfida era impossibile

Gli *Elementi* di Euclide presentano un elenco di dimostrazioni di possibilità geometriche, riguardanti le costruzioni con la riga e il compasso dei poligoni regolari. Costruire il triangolo equilatero e il quadrato è banale. E costruire il pentagono regolare è solo leggermente più complesso, perché richiede di costruire una proporzione aurea: quella determinata dal rapporto tra la diagonale e il lato del pentagono regolare, appunto.

Anche raddoppiare i lati di un poligono dato è banale: basta inscriverlo in un cerchio, e bisecarne gli angoli al centro. Raddoppiando il triangolo, il quadrato e il pentagono regolari, a 3, 4 e 5 lati, i Greci ottennero facilmente l'esagono, l'ottagono e il decagono regolari, a 6, 8 e 10 lati. Raddoppiando questi ultimi ottennero il dodecagono, l'esadecagono e l'icosagono regolari, a 12, 16 e 20 lati. E così via.

I casi irrisolti

Più sottile è fare il «minimo comune multiplo» di due poligoni aventi un numero di lati primi fra loro, facendo coincidere due loro vertici, e considerando la «differenza» dei due vertici consecutivi. In tal modo si possono di nuovo ottenere un dodecagono da un triangolo e un quadrato (3x4), o un icosagono da un quadrato e un pentagono (4x5). Ma si può anche ottenere un pentadecagono regolare, a 15 lati, da un triangolo e un pentagono (3x5). Raddoppiandolo si ottiene poi il poligono regolare a 30 lati, che si può anche ottenere dal pentagono e dall'esagono (5x6).

I Greci lasciarono però vari casi irrisolti nella successione dei poligoni regolari con un numero di lati fino a 30: in particolare, quelli dell'ettagono e dell'ennagono regolare, a 7 e 9 lati. Il secondo si sarebbe potuto costruire facilmente per trisezione degli angoli del triangolo, ma mentre bisecare un angolo con riga e compasso è facile, come fare per trisecarlo rimase un mistero per tutta l'antichità.

Il perché lo spiegò nel 1837 il ventitreenne Pierre Wantzel, nella *Ricerca sui metodi per riconoscere se un problema di geometria si può risolvere con riga e compasso*. Esattamente due secoli prima Cartesio aveva algebrizzato la geometria, mostrando che le rette e i cerchi corrispondono a equazioni lineari e quadratiche. Wantzel ne dedusse che i punti geometricamente costruibili mediante riga e compasso hanno coordinate algebricamente costruibili mediante le quattro operazioni classiche (somma, prodotto, sottrazione, divisione) e l'operazione di estrazione di radici quadrate. E viceversa.

Non basta la bravura

Wantzel mostrò poi che la trisezione di un angolo corrisponde alla soluzione di una semplice equazione cubica, e dimostrò che quando l'equazione non ha soluzioni razionali, non ha neppure soluzioni costruibili: dunque, l'angolo corrispondente non è trisecabile mediante riga e compasso. Ed è proprio questo che accade per l'equazione che corrisponde all'angolo di 120 gradi. Ma se quest'angolo non è trisecabile, *l'ennagono regolare non è costruibile*: altrimenti l'angolo al centro di 40 gradi sarebbe costruibile, e trisecherebbe quello di 120 gradi.

Un po' più complicato è dimostrare che anche *l'ettagono regolare non è costruibile*. E naturalmente non sono costruibili neppure i poligoni regolari con un numero di lati multiplo di 7 o 9, perché altrimenti lo sarebbero anche l'ettagono o l'ennagono. Per esempio, se il poligono a 14 lati fosse costruibile, per costruire un ettagono basterebbe connettere un vertice sì e uno no.

C'era dunque un motivo profondo per cui i Greci si erano arenati di fronte all'ettagono e all'ennagono regolare. La loro colpa non era di non essere stati abbastanza bravi a giocare con la riga e il compasso, ma di aver scelto un gioco in cui a volte è impossibile vincere.