

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)



La geometria del microcosmo

Fin dal classico trattato *Crescita e forma*, la geometria trova ruoli sorprendenti nel descrivere il mondo vivente

Che la geometria trovi applicazioni in fisica e astronomia è risaputo fin dall'antichità. Più sorprendente è stato scoprire che ne trova anche in biologia. Fece dunque scalpore un secolo fa il libro *Crescita e forma* (1917) di D'Arcy Wentworth Thompson, che per primo mostrò la pervasività della simmetria nelle forme della vita. Una delle applicazioni più inaspettate si trova nel capitolo dedicato alle cellule e ai microrganismi, che esemplificano tutte le possibili superfici di rotazione a curvatura media costante.

Tre esempi banali di tali superfici sono il piano, la sfera e il cilindro. Il primo esempio non banale fu scoperto da Eulero nel *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (1744). Si tratta della catenoide, ottenuta geometricamente ruotando una catenaria attorno alla sua direttrice, e fisicamente creando una bolla di sapone tra due anelli circolari disposti parallelamente. La curvatura media è nulla perché in ciascun punto la superficie si piega a sella, e sale tanto in una direzione quanto scende nell'altra.

Minime e minimali

Il fatto di avere curvatura media nulla rende il piano e la catenoide due superfici minime, nel senso di avere localmente la minima area rispetto ai bordi che le racchiudono; esse sono inoltre le uniche due superfici minime di rotazione. Il fatto di avere curvatura media costante le rende invece superfici minimali, nel senso di avere la minima area rispetto al volume che racchiudono; la sfera e il cilindro, che hanno curvatura media costante, ma non nulla, sono dunque superfici minimali di rotazione, ma non superfici minime.

Per ottenere altri esempi, si può notare che la catenaria è la curva descritta dal fuoco di una parabola che viene fatta rollare su una retta. Facendo rollare un'ellisse, ciascun fuoco descrive un'ondulatia, che appare appunto come una curva a onde. Facendo rollare un

ramo d'iperbole, il fuoco descrive una nodaria, che appare invece come una corda a cappi. Tutte queste curve si chiamano rullette, per ovvi motivi, e facendole ruotare attorno alle rette sulle quali sono state generate dal rollo della parabola, dell'ellisse o dell'iperbole, esse producono rispettivamente una catenoide, un'onduloide o una nodoide.

Tutte e tre sono superfici minimali di rotazione, avendo curvatura media costante: nulla nella catenoide, pari all'inverso dell'asse maggiore dell'ellisse nell'onduloide, e all'inverso della distanza dei due vertici dell'iperbole nella nodoide. Viceversa, nell'articolo *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* (1841), Charles-Eugène Delaunay ha dimostrato che non ci sono altre superfici minimali di rotazione: le sei considerate (piano, sfera, cilindro, catenoide, onduloide e nodoide) costituiscono dunque una caratterizzazione completa dell'intera famiglia.

Come pioggia sulle ragnatele

Nel suo libro D'Arcy Wentworth Thompson ha mostrato come in alcuni processi fisici si effettuino passaggi graduali da una delle sei superfici all'altra. Per esempio, se una bolla di sapone o una goccia d'olio, disposte a catenoide fra due anelli, sono sottoposte a trazione, prima si tendono in un cilindro, poi si deformano in una serie di onduloidi, infine si spezzano in una serie di goccioline sferiche. Lo stesso accade alle gocce di pioggia che cadono sulle ragnatele, o alle gocce di vernice stese sui fili della luce.

Più in generale, oltre alle strutture elementari sferiche o cilindriche, in natura si trovano anche quelle più complesse a forma di onduloidi e nodoidi, soprattutto nella gran varietà di organismi unicellulari noti come infusori ciliati. Più difficili da realizzare sono invece il piano e la catenoide, a causa della loro curvatura media nulla, che le rende piuttosto casi limite degli altri quattro tipi di superfici.