

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)



Musica irrazionale

Pitagora intuì la teoria matematica della musica, ma fu il suo discepolo Archita a svilupparla con preveggenza

Le varie biografie di Pitagora scritte da Diogene Laerzio, Porfirio e Giamblico risalgono a 7-800 anni dopo gli avvenimenti attribuiti al protagonista, e nessuna distingue tra i suoi contributi e quelli dei suoi discepoli, in particolare Ippaso di Metaponto, Filolao di Crotone e Archita di Taranto.

Sembra che l'unica scoperta attribuibile a Pitagora sia un abbozzo della teoria matematica della musica: in particolare, i rapporti numerici $2/1$ e $3/2$ per i due rapporti armonici di ottava e di quinta. Per esempio, se una corda di chitarra è lunga il doppio di un'altra, le note suonate distano un'ottava, come due Do consecutivi; se una corda è lunga una volta e mezza l'altra, le note suonate distano una quinta, come un Do e un Sol consecutivi.

Numeri e armonie

A Ippaso risalirebbero le scoperte del dodecaedro e del primo irrazionale: probabilmente la sezione aurea, coinvolta nelle proporzioni del pentagono e del dodecaedro stesso. A Filolao, le teorie esposte nel *Timeo* platonico: in particolare, la corrispondenza tra gli elementi e i solidi regolari, l'applicazione delle leggi musicali ai pianeti (la famosa «armonia delle sfere»), l'idea di un fuoco centrale nell'universo e il movimento della Terra attorno a esso. E ad Archita, che fu la fonte pitagorica di Platone e lo incontrò a Taranto, il completamento della teoria musicale.

In particolare, Archita attribuì rapporti numerici a tutti i rapporti armonici della scala eptatonica, intuendo che il legame tra i primi e i secondi è di natura logaritmica: cioè, per aggiungere o sottrarre i rapporti armonici bisogna moltiplicare o dividere i loro rapporti numerici. Per esempio, poiché due quinte (Do-Sol e Sol-Re) corrispondono numericamente a $9/4$, e musicalmente a un'ottava più un tono, togliendo un'ottava si ottiene $9/8$ come rapporto di un tono (Do-Re).

Moltiplicando e dividendo in vari modi i

rapporti via via ottenuti, Archita riuscì così ad assegnare a ciascuna nota della scala musicale una frazione corrispondente: in particolare, $9/8$ ai cinque toni (Do-Re-Mi e Fa-Sol-La-Si), e $256/143$ ai due semitoni (Mi-Fa e Si-Do). Ma si accorse che c'era un problema con questi ultimi perché, in quanto mezzi toni, essi sarebbero dovuti corrispondere anche alla radice quadrata di $9/8$, che essendo un numero irrazionale non può però coincidere con $256/143$.

Intervalli incommensurabili

In realtà, il problema sta all'origine stessa del sistema pitagorico, perché l'ottava e la quinta su cui esso si basa sono incommensurabili fra loro, nel senso che non esistono loro multipli interi comuni: in altre parole, il numero a cui bisogna elevare 2 per ottenere $3/2$ non è razionale. Tale numero è ovviamente il logaritmo in base 2 di 3, meno 1, e vale circa 0,585. E poiché la dimostrazione della sua irrazionalità è forse il più semplice esempio di questo genere di argomenti, vale la pena di ricordarla.

Naturalmente, basta dimostrare l'irrazionalità del logaritmo in base 2 di 3. Supponendo per assurdo che questo sia razionale, sarebbe uguale a m/n per qualche m ed n . Ma allora dalla definizione di logaritmo seguirebbe che 2 elevato a m/n è uguale a 3, e dunque che 2^m è uguale a 3^n . Il che è impossibile, perché il primo di questi numeri è pari e il secondo dispari.

Il rapporto fra ottava e quinta può dunque essere soltanto approssimato: per esempio, 7 ottave sono quasi uguali a 12 quinte, con un piccolo errore chiamato *comma pitagorico*. Ma poiché il problema non è risolvibile in maniera razionale, Archita decise di adottare la soluzione irrazionale naturale: divise cioè l'ottava in 12 semitoni uguali, ciascuno pari alla radice dodicesima di 2, anticipando il cosiddetto *temperamento equabile* che sarà adottato soltanto due millenni dopo, a conferma della sua preveggenza matematico-musicale.