di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

# Una storia surreale

## I numeri reali colmarono i buchi della retta reale creati dai numeri irrazionali, ma la matematica è andata oltre

Uno dei paradossi dell'insegnamento della matematica moderna è l'eccesso di rigore e di astrattezza, che spinge spesso a iniziare i corsi dal punto in cui dovrebbero invece finire. I numeri reali, in particolare, vengono di solito costruiti a partire dai numeri razionali, tramite successioni di Cauchy o sezioni di Dedekind, o addirittura introdotti assiomaticamente, come indefiniti elementi di un campo ordinato completo. In pratica, però, tutti continuano a pensare ai numeri reali come sviluppi decimali infiniti, seguendo l'idea suggerita da Simon Stevin nel 1585, che estese la notazione posizionale degli interi anche alle cifre dopo la virgola.

In termini moderni, le rappresentazioni decimali non sono altro che particolari serie di frazioni aventi a numeratore cifre comprese fra 0 e 9, e a denominatore le successive potenze di 10. E identificare i numeri reali con le rappresentazioni decimali infinite permette di derivare tutte le altre definizioni alternative, equivalenti fra loro, trovate nell'Ottocento: ciascuna con i propri vantaggi e svantaggi, e tutte con il difetto di non fornire rappresentazioni uniche di uno stesso reale. Un difetto che, nel caso degli sviluppi decimali, si manifesta nei numeri periodici in 9: per esempio, 0,999999 è in realtà uguale a 1, per l'argomento del paradosso di Zenone.

### Un colabrodo

L'introduzione dei numeri reali permise di risolvere il problema sollevato dalla scoperta degli irrazionali, che costituivano dei buchi nella retta razionale. Oggi sappiamo che quest'ultima era un vero e proprio colabrodo, perché i buchi irrazionali sono molti di più dei punti razionali: precisamente, come dimostrò Georg Cantor nel 1874, costituiscono un infinito non numerabile, di ordine superiore a quello numerabile dei razionali. Ciò nonostante, i numeri reali si possono ottenere tutti come limiti di successioni razionali, corrispondenti agli sviluppi decimali finiti ottenuti troncando gli sviluppi infiniti.

Di solito a scuola e all'università ci si ferma qui, accontentandosi del fatto che la retta reale costituisca il completamento della retta razionale: tutti i buchi sono stati tappati, perché ogni successione convergente di razionali converge a un numero reale, e altri non sembrano essercene, perché ogni successione convergente di reali converge a un numero reale. Ma la definizione dei numeri reali come sviluppi decimali infiniti suggerisce un modo per andare oltre, considerando sviluppi decimali più lunghi.

### Il vero completamento

In particolare, gli ordinali transfiniti di Cantor sono lo strumento più ovvio per attorniare ogni numero reale con una «nuvola» di infinitesimi, costituenti i numeri iperreali introdotti da Edwin Hewitt nel 1948. Basta infatti considerare sviluppi decimali di lunghezza ordinale maggiore di $\omega$: con sviluppi di lunghezza $\omega + \omega$ si aggiungono infinitesimi di prim'ordine, trascurabili rispetto ai numeri reali, con sviluppi di lunghezza $\omega + \omega + \omega$ infinitesimi di second'ordine, trascurabili rispetto ai precedenti, eccetera. Su questa via si incamminarono molti matematici a cavallo tra Ottocento e Novecento. Naturalmente, una delle decisioni da affrontare era a che punto fermarsi, nell'aggiunta di cifre decimali transfinite a un numero reale. La scelta più radicale la fecero Charles Peirce nel 1897 e Felix Hausdorff nel 1906, considerando sviluppi decimali estesi su tutti gli ordinali di Cantor.

Oggi queste idee sono confluite nei numeri surreali portati alla ribalta da John Conway nel 1976, che non solo estendono gli ordinali, da un lato, e reali e iperreali, dall'altro, ma costituiscono un campo ordinato universale, in cui possono essere immersi tutti i campi ordinati. Sono loro quindi il vero completamento dei razionali, oltre cui non si potrà più andare.