di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Che curve, questa architettura!

A partire da fine Ottocento la linea curva dell'iperbole è diventata centrale in numerose opere architettoniche

Gli architetti moderni ci hanno liberati dall'univoca dittatura della linea retta, e introdotti alla pluralistica democrazia delle linee curve. La matematica offre loro una cornucopia di scelte, di cui una delle più naturali è l'iperbole.

Ruotandola attorno all'asse di simmetria equidistante dai due fuochi si ottiene un iperboloide di rotazione a una falda che ha, nello spazio euclideo, curvatura costante negativa: esso è dunque un modello parziale del piano iperbolico. Il primo a usare questo iperboloide a fini architettonici è stato Vladimir Šuchov, per l'Esposizione Panrussa di Nižnij Novgorod del 1896, ma l'esempio più spettacolare e conosciuto è la famosa cattedrale di Brasilia progettata da Oscar Niemeyer, inaugurata nel 1970. Più prosaicamente, anche le torri di raffreddamento delle centrali elettriche o nucleari hanno spesso questa forma.

Visioni di un'unica realtà

Ruotando un'iperbole attorno all'asse di simmetria passante per i fuochi si ottiene invece un iperboloide di rotazione a due falde. Nello spazio euclideo, cioè misurando le distanze con la metrica newtoniana, ciascuna falda ha curvatura costante positiva, ed è dunque un modello parziale del piano sferico. Ma nello spazio di Minkowski, cioè misurando le distanze con la metrica einsteiniana, ciascuna falda ha distanza costante negativa dall'origine, e costituisce dunque una sfera immaginaria. Inoltre, ciascuna falda ha curvatura costante negativa, e risulta essere un modello completo del piano iperbolico!

Questo modello si può anche definire indipendentemente dalla geometria di Minkowski, considerando le rette non come linee di minima distanza rispetto alla metrica, bensì come intersezioni di una falda dell'iperboloide con i piani passanti per l'origine. Definito in questo modo, il modello era già stato pubblicato nel 1880 da Wilhelm Killing – che ne attribuiva la paternità a Karl Weierstrass – in un lavoro sul calcolo sulle superfici spaziali non euclidee.

Come ci si può aspettare, però, tutti i modelli della geometria iperbolica sono solo visioni prospettiche diverse di un'unica realtà. Puntualmente, se si proietta una falda dell'iperboloide dall'origine, sul piano orizzontale tangente al vertice, si ottiene il modello di Klein. L'intera falda viene infatti proiettata sul cerchio definito dall'intersezione del piano con il cono asintotico dell'iperboloide. E i piani passanti per l'origine, che definiscono le rette sull'iperboloide, intersecano il cerchio in corde, che definiscono le rette nel modello di Beltrami-Klein.

Invece, se si proietta una falda dal vertice dell'altra, sul piano orizzontale passante per l'origine, si ottiene il modello di Poincaré. L'intera falda viene infatti proiettata sul cerchio definito dall'intersezione del cono parallelo a quello asintotico, passante per il vertice dell'altra falda. E a una retta iperbolica su una falda, definita da un piano passante per l'origine, corrisponde prospetticamente un cono il cui vertice coincide con quello dell'altra falda, e che interseca il piano orizzontale in un arco di cerchio perpendicolare al bordo nei punti all'infinito determinati dagli asintoti.

Genesi di un aggettivo

Infine, se si proietta verticalmente una falda su un piano orizzontale, si ottiene un nuovo modello del piano iperbolico, proposto nel 1966 da David Gans. Questa volta il modello copre l'intero piano euclideo, e le sue rette sono di due tipi: quelle euclidee passanti per l'origine, e i rami di iperboli aventi per asintoti le proiezioni del cono asintotico dell'iperboloide. Questo modello rende dunque giustizia all'aggettivo «iperbolico» attribuito alla geometria non euclidea a curvatura costante negativa, apparentemente senza nessun collegamento diretto con l'iperbole.