di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Il mostro e la Luna

Una breve storia dei gruppi finiti, a cui John Conway, morto un anno fa, ha contribuito in modo epocale

Uno dei modi per ricordare John Conway, morto di COVID-19 un anno fa, l'11 aprile 2020, è rivisitare brevemente la storia dei gruppi finiti, i cui esempi più ovvi sono costituiti dalle simmetrie dei poligoni o dei solidi regolari.

Non tutti i gruppi di simmetria sono finiti: per esempio, un cerchio si può far ruotare di un angolo qualunque intorno al suo centro. E non tutti i gruppi sono «semplici», nel senso di non poter essere scomposti in fattori: per esempio, proprio perché il gruppo delle simmetrie del cubo di Rubik si può scomporre, esistono strategie abbordabili per risolverlo.

Uno dei grandi risultati della matematica del Novecento, a cui Conway ha contribuito, è stata la classificazione dei gruppi finiti semplici in 18 famiglie e 26 eccezioni, la più grande della quale è un vero e proprio mostro: quello a cui allude il titolo di *Il Mostro e la simmetria* (2006) di Mark Ronan che narra la saga di questa classificazione. È stata infatti portata a termine una grande opera collettiva che, nell'arco di un secolo e mezzo, ha impegnato un centinaio di matematici e prodotto decine di migliaia di pagine di dimostrazioni.

Una sorpresa mai vista

In sintesi, la classificazione dei gruppi semplici finiti consiste di tre classi di famiglie infinite. Ci sono i gruppi ciclici, come le rotazioni di un poligono regolare. Ci sono poi i gruppi alterni, prodotti dalle permutazioni pari di un insieme finito di oggetti. Ci sono infine i gruppi di tipo Lie, come le rotazioni di un cerchio. Dalla classificazione in quattro famiglie dei gruppi semplici infiniti di Lie, ottenuta nell'Ottocento, si derivano 16 famiglie di gruppi semplici finiti di tipo Lie, che aggiunte alle due famiglie dei gruppi semplici ciclici o alterni portano appunto il numero delle famiglie a 18.

Come nella classificazione dei gruppi semplici di Lie non rientravano cinque gruppi eccezionali, nella classificazione dei gruppi semplici finiti non rientrano 26 gruppi sporadici, i primi dei quali furono scoperti nel 1861 da Emile Mathieu, e l'ultimo nel 1976 da Zvonimir Janko. Il più sorprendente e interessante è però il cosiddetto Mostro, scoperto nel 1973 da Bernd Fischer e costruito nel 1980 da Robert Griess. La sorpresa sta nella sua grandezza, visto che consiste di ben 808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368.000.000.000 elementi.

L'interesse sta invece nel fatto che al Mostro sono riconducibili come sottogruppi o quozienti ben 19 altri gruppi sporadici, ed esso rende dunque conto di 20 di essi in tutto, venuti alla luce in tre generazioni successive: prima i cinque piccoli scoperti inizialmente da Mathieu nell'Ottocento, poi i sette medi riconducibili a un gruppo scoperto da Conway nel 1968, infine gli otto enormi riconducibili al Mostriciattolo e al successivo Mostro, scoperti nel decennio successivo da Fischer e Griess.

I paria dei gruppi

Non si possono invece ricondurre al Mostro i rimanenti sei gruppi sporadici, non a caso chiamati paria, perché fuori casta rispetto alla cosiddetta famiglia felice degli altri 20, le cui relazioni con il resto della matematica sono state studiate in particolare da Conway e dal suo studente Simon Norton. La profondità del pensiero e l'eccentricità del comportamento di entrambi sono i soggetti delle loro rispettive biografie: *Genius At Play* (2015) di Siobhan Roberts e *Un genio nello scantinato* (2011) di Alexander Masters.

I due libri raccontano in particolare la genesi della loro congettura chiaro di Luna: un gioco di parole su *moonshine*, che in inglese significa anche «lunatica». La congettura proponeva azzardate connessioni tra il Mostro dell'algebra e le funzioni modulari dell'analisi, e la sua inaspettata dimostrazione tramite la teoria delle stringhe è valsa a Richard Borcherds la medaglia Fields nel 1998.