di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

La forma del vuoto

Spesso la fisica sta nascosta dietro la geometria, come avevano intuito Albert Einstein e alcuni suoi colleghi

Il maggior risultato del pensiero scientifico di Albert Einstein è racchiuso nelle equazioni di campo della relatività generale del 1915, che uguagliano il tensore di curvatura di Ricci al tensore energia- impulso: secondo il motto di John Archibald Wheeler, nelle equazioni di Einstein «la materia dice allo spazio-tempo come curvarsi, e lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi». Da allora, il calcolo tensoriale di Ricci è entrato nel bagaglio degli strumenti matematici indispensabili ai cosmologi.

Nel 1917, infatti, Einstein applicò le proprie equazioni allo studio dell'intero universo, ottenendo il primo modello cosmologico moderno. Di modelli cosmologici relativistici oggi se ne conoscono a bizzeffe, ma i più singolari sono quelli dello spazio-tempo vuoto, che si ottengono uguagliando a zero il tensore di Ricci. Una soluzione banale è ovviamente lo spazio-tempo piatto ed euclideo, in cui non ci sono né materia né gravità, ma esistono anche soluzioni non banali, in cui c'è gravità, anche se non c'è materia. Il motivo è che a produrre una parte della curvatura dello spazio-tempo, chiamata curvatura di Weyl, può essere non la materia, ma la radiazione, per esempio nella forma di forze di marea o di onde gravitazionali.

Tre K per lo spazio-tempo

Nel caso delle equazioni di Einstein classiche per lo spazio-tempo a quattro dimensioni vuoto, oltre alla soluzione piatta ed euclidea esistono le cosiddette superfici K3, alcune delle quali ben note ai geometri algebrici fin dall'Ottocento. A battezzare in tal modo la famiglia fu André Weil, «in onore di Ernst Kummer, Erich Kähler e Kunihiko Kodaira, oltre che della meravigliosa montagna K2 in Kashmir», ed essa costituisce uno dei dieci tipi della classificazione delle superfici quadridimensionali di Enriques e Kodaira, che valse a quest'ultimo la medaglia Fields nel 1954.

A parte il loro significato fisico, come possibili strutture dello spazio-tempo vuoto, le superfici K3 hanno dunque un interesse matematico indipendente. In particolare, esse costituiscono l'esempio più abbordabile di superfici quadridimensionali che non si riducono a curve o a tori algebrici, benché alcune siano comunque assai complicate: una sorprendente si trova nel «taccuino perduto» di Srinavasa Ramanujan, che la scoprì nel corso del suo studio delle «quasi soluzioni» del teorema di Fermat per l'esponente 3, esemplificate dalle decomposizioni del numero 1729 nelle somme dei cubi di 1 e 12, e di 9 e 10.

Per la teoria delle stringhe

Nel caso delle equazioni di Einstein per lo spazio vuoto a sei dimensioni le soluzioni non banali si chiamano invece superfici di Calabi e Yau, in onore di Eugenio Calabi e Shing-Tung Yau: il primo ne congetturò nel 1954 l'esistenza in un contesto topologico, e il secondo provò nel 1977 la congettura in un contesto analitico, ottenendo per questo la medaglia Fields nel 1982. Lui stesso ha poi raccontato come sia arrivato al risultato, e quali conseguenze esso abbia avuto per la matematica e la fisica, nell'impegnativo libro *La forma dello spazio profondo* (il Saggiatore, 2011).

In particolare, le superfici di Calabi e Yau hanno trovato un'inaspettata applicazione nella teoria delle stringhe, dove mostrano come potrebbero essere arrotolate, in ciascun punto dello spazio-tempo usuale, le sei dimensioni aggiuntive previste dalla teoria. Inoltre, l'osservazione che ci sono coppie di superfici diverse che producono la stessa fisica ha portato alla scoperta della simmetria speculare, che si è rivelata essere uno strumento fondamentale per semplificare vari calcoli in teoria delle stringhe, difficili con una superficie ma facili con un'altra. A ulteriore conferma che, come aveva intuito Einstein, spesso la fisica sta nascosta dietro la geometria.