

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino  
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)



# Le formule di Interstellar

Alcune nozioni della matematica dei buchi neri  
sono semplici in modo sorprendente

Il film *Interstellar* (2014) del regista Christopher Nolan è uno dei migliori esempi di commistione tra cinema e scienza. E il libro *La scienza di Interstellar. Viaggiare nello spazio-tempo* (Bompiani, 2018) del premio Nobel per la fisica Kip Thorne è uno dei migliori esempi di divulgazione scientifica, che riesce nel duplice compito di illustrare la scienza con le immagini del film, e spiegare il film con le idee della scienza.

## Da Einstein in poi

Nelle note tecniche, Thorne accenna ad alcune nozioni della matematica dei buchi neri, che risulta essere sorprendentemente semplice, nonostante derivi dalla complicata teoria generale della relatività pubblicata da Albert Einstein nello storico lavoro *Feldgleichungen der Gravitation* (novembre 1915). A ruota Karl Schwarzschild, pochi mesi prima di morire al fronte, pubblicò l'articolo *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie* (gennaio 1916), in cui calcolò il raggio dell'orizzonte degli eventi di un buco nero: cioè, la superficie superata la quale niente che entri nel buco nero può più uscire.

Per trovare questo raggio, basta notare che la relatività speciale impone che niente possa muoversi a velocità superiori a quella della luce  $c$ , e la meccanica newtoniana calcola che la velocità di fuga da un corpo di massa  $M$  a una distanza  $r$  da esso è pari a  $\sqrt{2GM/r}$ . Schwarzschild notò dunque che una massa  $M$  concentrata entro il raggio  $2GM/c^2$  diventa un buco nero, che ha quel raggio come orizzonte degli eventi. La formula vale per i buchi neri statici, mentre per quelli rotanti il raggio può scendere fino al limite minimo  $GM/c^2$ , a seconda della velocità di rotazione.

Benché l'effetto della gravità di un buco nero di raggio  $R$  su un corpo a distanza  $r$  sia regolato dalle equazioni della relatività generale, Bohdan Paczyński e Paul Wiita hanno scoperto in *Thick accretion disks and supercritical*

*luminosities* (1980) che lo si può approssimare sorprendentemente bene con una piccola variazione della classica legge dell'inverso del quadrato della distanza: cioè, al posto della solita formula  $GM/r^2$  basta usare  $GM/(r-R)^2$ . In particolare, a grandi distanze gli effetti del buco nero non si fanno più sentire, e la gravitazione einsteiniana torna a coincidere con quella newtoniana.

Avvicinandosi all'orizzonte degli eventi, invece, la forza di gravità tende all'infinito. In particolare, a una distanza minore di tre raggi  $R$  le orbite circolari attorno al buco nero cessano di essere stabili, e gli oggetti tendono a essere catturati. Il passaggio attraverso l'orizzonte non verrebbe comunque percepito in maniera sensibile da chi entrasse nel buco nero, anche se l'immagine di quello che è entrato cesserebbe di essere vista dal di fuori, analogamente a ciò che succede per l'orizzonte terrestre. In altre parole, mentre la singolarità al centro del buco nero è fisica e assoluta, quella sull'orizzonte degli eventi è cartografica e relativa agli osservatori esterni.

## Un'applicazione inaspettata

La formula più sorprendente è però quella riportata da John Wheeler, il maestro di Thorne, in *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics* (1998), e riguarda la massa del buco nero risultante dalla collisione e fusione di due buchi neri non rotanti. Il processo genera onde gravitazionali, la cui rilevazione è ora possibile grazie al rivelatore LIGO progettato da Thorne, che gli è valso il Nobel per la fisica nel 2017, e al rivelatore Virgo. L'energia perduta nella generazione di queste onde fa sì che la massa del buco nero risultante sia inferiore alla somma delle masse dei due buchi neri originari: il valore preciso è la radice quadrata della somma dei quadrati delle loro masse, con un'inaspettata applicazione del teorema più famoso della geometria antica alla teoria degli oggetti più famosi della cosmologia.