di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Mancati per un pelo

Alcuni controesempi del teorema di Fermat mancano il bersaglio per una sola unità

Il film *L'uomo che vide l'infinito* (2015) ripropone il più famoso episodio della vita di Srinivasa Ramanujan. Quello in cui Godfrey Hardy andò a trovarlo con un taxi targato 1729, e quando commentò che si trattava di un numero senza interesse, Ramanujan rispose che invece era molto interessante, essendo il più piccolo che si può scrivere in due modi diversi come somma di due cubi: cioè, 1 e 1728 (cubi di 1 e 12), o 729 e 1000 (cubi di 9 e 10).

L'episodio di solito è citato come l'esempio archetipico della visionaria intuizione del matematico indiano. In realtà, già nel 1913, due anni prima di recarsi in Inghilterra, Ramanujan aveva pubblicato in India la doppia decomposizione di 1729, alla quale tornò più volte in seguito nei suoi lavori e nei taccuini degli appunti.

Gli esempi dei Simpson

La stessa decomposizione era stata notata per la prima volta nel 1657 da Bernard Frénicle de Bessy nel corso di una corrispondenza con Pierre de Fermat. Non a caso, visto si trattava di un «quasi controesempio» al famoso ultimo teorema di Fermat stesso: infatti, la somma dei cubi 729 e 1000 è «quasi uguale» al cubo 1728, con un eccesso di 1.

Nel taccuino perduto di Ramanujan si trovano molti altri di questi «quasi controesempi». Il più piccolo è la somma di 216 e 512 (cubi di 6 e 8), uguale a 729 (cubo di 9) meno 1, pari a un difetto di circa 1 per 1000. Uno più grande è la somma dei cubi di 65.601 e 67.402, uguale al cubo di 83.802 più 1, pari a un eccesso di circa 1 su mezzo milione di miliardi. Ma Ramanujan mostrò come generare infiniti esempi di questo genere, con eccessi o difetti arbitrariamente piccoli.

Un altro tipo di «quasi controesempi» al teorema di Fermat è stato divulgato dalla serie televisiva *I Simpson*. Nell'episodio *La paura fa novanta VI* del 1998 appare la formula che dice che la somma delle dodicesime potenze di 1782 e 1841 è uguale alla dodicesima potenza di 1922. Nell'episodio *L'inventore di Springfield* del 1999, una formula simile dice che la somma delle dodicesime potenze di 3987 e 4365 è uguale alla dodicesima potenza di 4472.

Questi «controesempi» al teorema di Fermat sono sbagliati. Ma se uno prova a verificarli con una calcolatrice tascabile che mostra al massimo dieci cifre, sembrano entrambi corretti! Il trucco sta nel fatto che i due numeri in questione differiscono soltanto oltre la decima cifra, e la differenza non si vede su calcolatrici con *display* a dieci sole cifre.

In realtà, con un po' di attenzione si vede anche a occhio che il primo esempio è sbagliato: infatti, le potenze dodicesime di 1782 e 1841 sono una pari e l'altra dispari, e sommate non possono dare come risultato la potenza dodicesima di 1922, che è pari. Questa verifica non funziona nel secondo esempio, perché le dodicesime potenze di 3987 e 4365 sono entrambe dispari, e la loro somma è pari, come la dodicesima potenza di 4472. Ma basta notare che i primi due numeri sono divisibili per 3, perché così sono le somme delle loro cifre, mentre il terzo numero non lo è.

Il vero autore

Diversamente da quelli di Ramanujan, questi «quasi controesempi» del teorema di Fermat non mancano il bersaglio di una sola unità: nel secondo caso, per esempio, i numeri in questione hanno entrambi 44 cifre, ma la loro differenza è un enorme numero di 33 cifre, che provoca un eccesso di circa 1 su 100 miliardi. Naturalmente, a trovare questi e molti altri «quasi controesempi» non sono stati gli autori dei *Simpson*, ma il matematico Noam Elkies, in uno studio generale dei punti razionali che giacciono vicini alle curve algebriche definite dalle equazioni di Fermat con esponente superiore a 2. Sopra queste curve invece, per il teorema di Fermat, non ci può essere nessun punto razionale non banale.