

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)



Un gioco d'autore

La curiosa uguaglianza di giochi inventati negli anni quaranta dai matematici Piet Hein e John Nash

Nel 1942 l'eccentrico matematico danese Piet Hein inventò un gioco ispirato al famoso problema dei quattro colori. Si gioca in due, su una scacchiera romboidale 11 per 11 a caselle esagonali. A ciascun giocatore vengono assegnati due lati opposti della scacchiera e pedine di colore diverso, bianco o nero. Alternando le proprie mosse con l'avversario, ogni giocatore dispone le proprie pedine sulle caselle, e vince chi alla fine riesce a creare un collegamento ininterrotto fra i propri due lati.

Il motivo per giocarlo su una scacchiera a caselle esagonali riguarda il fatto che almeno uno dei due giocatori deve vincere. Ma su scacchiere a caselle quadrate, in cui quattro caselle si intersecano in ogni vertice, è facile mostrare che i due concorrenti possono bloccarsi a vicenda, occupando ciascuno due caselle in diagonale attorno a un vertice, e finire in patta. Su scacchiere a caselle esagonali, dove solo tre caselle si intersecano in ogni vertice, non è invece possibile che entrambi i giocatori si possano bloccare a vicenda in uno dei vertici, a causa del numero dispari di caselle.

Hein mostrò il gioco ad alcuni amici e studenti: in particolare ad Aage Bohr, che allora era noto come figlio del grande Niels Bohr, premio Nobel per la fisica nel 1921, ma che poi seguì le orme del padre e vinse anche lui il premio Nobel nel 1975, sempre per la fisica. Poiché il gioco riscosse l'attenzione di coloro che lo giocarono per primi, Hein decise di commercializzarlo. La versione di mercato si chiamava *Polygon*, ed ebbe una certa notorietà in Danimarca nel 1943.

La versione di Nash

Nel 1948 John Nash, futuro protagonista del film *A beautiful mind* (2001), ma allora semplice dottorando a Princeton, mostrò a David Gale un gioco che si giocava su una scacchiera a caselle quadrate, in cui però ci si poteva muovere non solo verticalmente od

orizzontalmente, ma anche diagonalmente (in una sola direzione). Gale capì che il gioco di Nash si poteva riformulare su una scacchiera a caselle esagonali, e ne costruì una 14 per 14 che mise a disposizione dei matematici nella sala dei professori. Il gioco ebbe subito successo e divenne noto con il nome di *Nash*, dal cognome del suo inventore, ma quando venne commercializzato nel 1952 fu chiamato *Hex*.

L'interesse di Nash per il gioco derivava dalle sue proprietà teoriche. Innanzitutto, egli diede una dimostrazione formale del fatto che il gioco non può finire in patta, usando il teorema del punto fisso di Brouwer, e nel 1979 Gale dimostrò che vale anche il contrario: cioè si può dimostrare il teorema di Brouwer usando l'affermazione che il gioco non può finire in patta. In altre parole, i due risultati sono equivalenti fra loro.

Inoltre, essendo *Hex* un gioco finito, un teorema del 1921 di Émile Borel assicura che uno dei due giocatori abbia una strategia vincente. Sorprendentemente, Nash dimostrò che è il primo giocatore ad avere una strategia, ma non si sa quale sia. L'idea è che se il secondo giocatore avesse una strategia vincente, il primo potrebbe rubargliela e imitarla dopo aver giocato una prima mossa a caso, che non può danneggiarlo: se infatti in seguito la strategia gli chiedesse di giocare quella posizione, l'avrebbe già fatto, e potrebbe giocare un'altra mossa a caso.

Due in uno

Solo nel 1957, grazie a una rubrica di Martin Gardner su «Scientific American», si è capito che *Polygon* e *Hex* sono lo stesso gioco, scoperto indipendentemente e con motivazioni differenti da Hein nel 1942 e Nash nel 1948.

Anche se per i dettagli bisogna leggere il libro *Hex. The Full Story* di Ryan Hayward e Bjarne Toft (2019), che costituisce il resoconto definitivo della nascita e della teoria di questo affascinante gioco.