di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Matematica gattopardesca

Anche in questo campo a volte cambiare tutto è utile a far rimanere tutto come è

Il Gattopardo (1958) di Giuseppe Tommasi di Lampedusa è passato alla storia per la famosa frase «se vogliamo che tutto rimanga come è, bisogna che tutto cambi», che presuppone una tensione fra la mutevole apparenza del divenire e l'immutevole realtà dell'essere tipica della filosofia di Parmenide.

In geometria, l'apparenza prende spesso le vesti delle coordinate dei punti in un sistema di assi cartesiani, i cui valori cambiano al variare del sistema.

Geometrie e orbite

La realtà si manifesta invece, per esempio, nella lunghezza di un segmento, che non solo rimane sempre la stessa quando gli assi vengono traslati o ruotati, ma si calcola sempre nello stesso modo: cioè, con la formula quadratica $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, che deriva dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo la cui ipotenusa è l'immutevole segmento Δs stesso, e i cui cateti sono le mutevoli differenze Δx e Δy delle coordinate dei suoi estremi.

Analogamente, l'equazione quadratica $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ di una sezione conica cambia se si traslano o si ruotano gli assi, ma il discriminante $b^2 - 4ac$ rimane sempre lo stesso: in particolare, il suo segno (positivo, nullo o negativo) determina il tipo di figura corrispondente all'equazione (iperbole, parabola o ellisse). Anche la traccia $a + c$ rimane sempre la stessa se si traslano o si ruotano gli assi, mentre la somma $d^2 + e^2$ e il termine noto f rimangono invariati solo se si ruotano gli assi.

Proprio perché la curva non cambia quando si traslano o si ruotano gli assi, la scelta di questi ultimi viene spesso fatta per semplificare le equazioni. Per esempio, ponendo l'origine nel centro si ottiene $x^2 + y^2 = 1$ per il cerchio di raggio unitario, ponendo il vertice nell'origine e l'asse X tangente alla curva si ottiene $y = ax^2$ per la parabola, e ponendo gli assi X e Y sugli asintoti si ottiene $xy = 1$ per l'iperbole equilatera.

In fisica, i sistemi tolemaico e copernicano altro non erano che le descrizioni del sistema solare rispetto ad assi con l'origine rispettivamente nel centro della Terra o del Sole. Nel primo caso, le orbite della Luna e del Sole apparivano (in prima approssimazione) come cerchi con il centro nell'origine, e le orbite dei pianeti come curve a cappi, ottenute dalla composizione di due curve circolari (le orbite del pianeta e della Terra attorno al Sole). Nel secondo caso, le orbite dei pianeti apparivano come cerchi con il centro nell'origine, e l'orbita della Luna come una poligonale a lati ricurvi (*si veda la rubrica di gennaio 2018*).

Le soluzioni di Einstein

La relatività ristretta pose il problema di scrivere le leggi della fisica, compresa quella di gravità, in modo che risultassero invarianti rispetto a traslazioni uniformi (cioè, a velocità costante e accelerazione nulla) degli assi di riferimento dello spazio e del tempo. Le leggi di Newton rimanevano invariate se si passava da un sistema di assi all'altro mediante le trasformazioni di Galileo, mentre erano le leggi dell'elettromagnetismo di Maxwell a rimanere invariate se si usavano invece le trasformazioni di Lorentz per lo spazio e il tempo. Einstein notò che per lasciare invariate anche le leggi di Newton, bastava estendere le trasformazioni di Lorentz anche alla massa.

La teoria generale della relatività richiese invece che le leggi della fisica risultassero invarianti anche rispetto a cambiamenti non uniformi degli assi di riferimento, come le traslazioni accelerate o le rotazioni. Per svilupparla, Einstein dovette ricorrere alla geometria riemanniana e far uso del calcolo tensoriale inventato da Gregorio Ricci-Curbastro e sviluppato da Tullio Levi-Civita, che serviva appunto a esprimere le formule della geometria riemanniana in maniera indipendente dai sistemi di riferimento, nella maniera il più gattopardesca possibile.