di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Leggere una formula

Come i testi letterari, anche le equazioni possono avere livelli di lettura differenti

Nelle sue memorabili *Lezioni di letteratura* Vladimir Nabokov descrive tre livelli di lettura di un testo letterario. Il lettore «infantile» ne legge le righe, identificandosi con i personaggi e appassionandosi alle loro vicende. Il lettore «adolescenziale» legge tra le righe, sintonizzandosi sul supposto messaggio dell'autore. Il lettore «maturo» legge oltre le righe, analizzando la vera struttura dell'opera.

Ma lo scrittore russo sapeva bene che «il confine tra un'opera d'arte e un lavoro scientifico non è così chiaro come in genere si pensa». Dunque, ciò che diceva a proposito della lettura dei romanzi si può applicare anche allo studio delle formule.

Secondo e terzo grado

Prendiamo, per esempio, la soluzione dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tramite la formula «meno b più o meno la radice quadrata di b^2 meno $4ac$, diviso $2a$». La lettura infantile, che viene appunto raccontata ai bambini alle elementari o alle medie, è che la storia (l'equazione di secondo grado) fornisce indizi palesi (i tre coefficienti) che permettono di smascherare la variabile (le due soluzioni) attraverso un'indagine poliziesca (la formula).

La lettura adolescenziale, insegnata alle superiori, è che la formula esplicita di risoluzione dell'equazione di secondo grado contiene molti messaggi impliciti. Anzitutto, poiché essa coinvolge una radice quadrata del determinante $b^2 - 4ac$, a seconda che questo sia positivo, nullo o negativo ci saranno due soluzioni reali distinte, una soluzione reale doppia o nessuna soluzione reale, ma due soluzioni complesse coniugate.

Inoltre, poiché la formula fa intervenire un «più o meno», esiste una simmetria nascosta fra le due soluzioni, che si può facilmente esplicitare. Per esempio, la loro somma annulla i due segni, ed è dunque uguale a $-b/a$. Il loro prodotto, invece, si riduce al prodotto notevole di una somma per una differenza, ed è dunque uguale a c/a.

La lettura matura, rivelata all'università, situa l'equazione di secondo grado in un contesto generale. Anzitutto, il teorema fondamentale dell'algebra enunciato da Albert Girard nel 1629 e dimostrato da Jean-Robert Argand nel 1806, stabilisce che un polinomio di grado n a coefficenti complessi ha esattamente n soluzioni complesse, e può essere fattorizzato nel prodotto di n fattori complessi lineari.

Procedere al contrario

Usando questa fattorizzazione, si può inoltre dimostrare che le relazioni tra i coefficienti dell'equazione e le combinazioni delle soluzioni continuano a valere per polinomi di grado n qualunque, e si estendono alle «formule di Viète», dimostrate da Girard nel 1629 e riscoperte da Isaac Newton nel 1666. Per esempio, nell'equazione di terzo grado $ax^3 + bx^2 + cx + d$ la somma delle soluzioni è $-b/a$, la somma dei prodotti delle coppie di soluzioni è c/a, e il prodotto delle soluzioni è $-d/a$.

In particolare, i coefficienti di un'equazione si possono esprimere come polinomi simmetrici delle soluzioni, chiamati «elementari» perché permettono di ricostruire qualunque altro polinomio simmetrico delle soluzioni dell'equazione. Si può dunque pensare di procedere al contrario, nel senso di determinare non i coefficienti a partire dalle soluzioni, ma le soluzioni a partire dai coefficienti.

Studiando le permutazioni delle soluzioni che ne lasciano invariati i polinomi simmetrici, Joseph-Louis Lagrange ha mostrato nel 1770 come ricavare le formule rinascimentali per le equazioni di terzo e quarto grado. Paolo Ruffini ha scoperto nel 1799 che non esiste un'analoga formula per l'equazione generale di quinto grado. Ed Évariste Galois ha sviluppato nel 1830 la teoria che permette di determinare se una data equazione ammette una formula risolutiva, e in tal caso come trovarla.