

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)



La nascita dell'irrazionale

Una breve storia della scoperta
delle grandezze incommensurabili

La diagonale e il lato del quadrato sono grandezze incommensurabili, nel senso che non esiste nessuna unità di misura che stia un numero intero di volte in entrambe: qualunque unità che misuri esattamente la diagonale non misura esattamente il lato, e viceversa. Storicamente, la scoperta di questo «principio di indeterminazione» è attribuita a Pitagora, mentre la colpa di averla divulgata è imputata a Ippaso di Metaponto.

La principale fonte al riguardo è *La vita di Pitagora* di Giamblico, che narra: «Qualcuno dice che il primo che rivelò la natura della commensurabilità e dell'incommensurabilità a gente indegna di conoscerla suscitò un tale odio tra gli altri Pitagorici, che essi non solo lo cacciarono dalla comunità, ma gli costruirono anche un sepolcro, come se fosse già morto. Altri dicono che persino gli dèi si erano adirati, e fecero annegare per la sua empietà Ippaso, che aveva rivelato che il dodecaedro è inscrivibile in una sfera».

La leggenda della segretezza

In questa citazione c'è molta confusione, che proviamo a dissipare. Anzitutto, è una leggenda il fatto che i Pitagorici avessero un vincolo di segretezza che li impegnava a non divulgare le proprie dottrine. Di questo vincolo non si parla affatto nelle fonti più antiche, e sembra che la leggenda sia sorta proprio per un equivoco a proposito della scoperta dell'incommensurabilità.

L'aggettivo *logon* che i Greci usavano per indicare la commensurabilità derivava dall'ambiguo sostantivo *logos*, che aveva due significati principali. Il primo era «parola», e il secondo «rapporto»: un termine, questo, che in latino fu tradotto con *ratio*, e in italiano con «ragione».

Il credo originario dei Pitagorici era che tutto fosse commensurabile: cioè, matematicamente rapportabile e linguisticamente esprimibile. La scoperta di grandezze incom-

mensurabili non solo falsificò questo credo, ma mostrò l'esistenza di grandezze che potevano essere chiamate «irrazionali» o «indicibili». Ma questa indicibilità finì per essere intesa come una proibizione della divulgazione di quella particolare scoperta, e poi dell'intero insegnamento pitagorico. Ovvero, un «non si può dire» divenne un «non se ne deve parlare».

Il collegamento con il dodecaedro

Fatta dunque la tara al racconto di Giamblico, rimane il fatto che egli collegava Ippaso alla scoperta di grandezze incommensurabili, citando però non la diagonale e il lato del quadrato, ma il dodecaedro inscritto in una sfera. Questo lascia intendere che siano stati appunto i Pitagorici, e forse Ippaso stesso, a scoprire che esistevano altri due solidi regolari (dodecaedro e icosaedro), oltre ai tre più semplici già noti (tetraedro, cubo e ottaedro).

Ora, il collegamento del dodecaedro con gli irrazionali sta nel fatto che le sue facce sono pentagonali, e che la diagonale e il lato del pentagono sono incommensurabili. La dimostrazione geometrica è visualizzabile tracciando le diagonali del pentagono, che formano una cosiddetta «stella pitagorica» (appunto), con un nuovo pentagono al centro: si innesca così un regresso all'infinito, in cui pentagoni e stelle si alternano telescopicamente.

Ancora più semplice è la dimostrazione dell'incommensurabilità dei lati lungo e corto di un rettangolo aureo, che hanno la stessa proporzione della diagonale e del lato del pentagono: cioè, la famosa proporzione aurea, scoperta anch'essa dai Pitagorici. Probabilmente essi si imbatterono nell'incommensurabilità prima nel rettangolo aureo, e poi nel pentagono. E solo in seguito qualcuno scoprì poi lo stesso fenomeno nel quadrato, la cui dimostrazione geometrica è molto meno perspicua, trovando la dimostrazione numerica per assurdo dell'irrazionalità della radice di due riportata da Aristotele negli *Analitici primi*.