di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

Numeri da record

Problemi in apparenza banali possono richiedere soluzioni incredibilmente complicate

Nell'*Apologia di un matematico* (1940), Godfrey Hardy scrisse che «la matematica è uno sport da giovani». E ai matematici, come a tutti gli sportivi, piacciono i record. Nel 1938 Edward Kasner, durante una passeggiata, chiese al nipotino Milton Sirotta come avrebbe battezzato un numero da record: per esempio, un 1 seguito da cento 0. Il bambino suggerì «googol», storpiando il nome di un personaggio dei fumetti dell'epoca di nome Barney Google. Da allora, «googol» divenne il nome del numero 10 alla 100, che in seguito fu nuovamente storpiato da Larry Page e Sergey Brin per il motore di ricerca che oggi si chiama appunto Google.

Pochi anni prima, nel 1933, Stanley Skewes aveva trovato 10 alla 10 alla 10 alla 34 come limite entro il quale la percentuale inversa del numero dei primi fino a x supera il logaritmo di x, usando l'ipotesi di Riemann nella dimostrazione. Quello divenne il record del più grande numero usato in una dimostrazione matematica, e fu battuto nel 1955 dallo stesso Skewes, che trovò 10 alla 10 alla 10 alla 963 senza usare l'ipotesi di Riemann. Entrambi i numeri sono enormi, perché si ottengono con un processo di crescita esponenziale iterata.

Grafi e colori

Nel 1980, Ronald Graham e Bruce Rothschild finirono nel *Guinness dei primati* per aver usato un numero stratosferico in una ricerca legata al teorema di Ramsey, che studia problemi come il seguente: se si collega un certo numero di punti fra loro in tutti i modi possibili, formando un grafo completo, e ciascun collegamento viene colorato in rosso o in blu, quanti punti sono necessari e sufficienti per trovare sempre tre collegamenti dello stesso colore che formano un triangolo? Colorando i lati di un pentagono in rosso e le sue diagonali in blu, si vede che non ci sono triangoli con i lati dello stesso colore: dunque, cinque punti non bastano. Ma si può dimostrare che sei sono sufficienti. In altre parole, per il problema enunciato la risposta è sei.

Per risolvere un problema analogo, ma più complicato, Graham e Rothschild dovettero usare un numero ottenuto iterando non la funzione esponenziale, ma la funzione che itera l'esponenziale, e poi la funzione che itera la funzione che itera l'esponenziale, e così via, per ben 64 volte. Benché la crescita esponenziale sia molto veloce, la sua iterazione è molto più veloce, e l'iterazione della sua iterazione molto molto più veloce e così via: la sessantaquattresima iterazione di questo procedimento cresce dunque a ritmi inimmaginabili, e il numero di Graham e Rothschild è appunto un suo enorme valore.

Parole e lettere

Nel 1998 Harvey Friedman affrontò un genere di problemi apparentemente banali, come il seguente. Dato un alfabeto finito, chiamiamo «parola» una sequenza consecutiva di sue lettere. Data una parola, chiamiamo «blocchi» le sequenze di lunghezza crescente ottenute considerando le lettere dalla prima alla seconda, dalla seconda alla quarta, dalla terza alla sesta e così via. Quanto può essere lunga una parola, se nessun suo blocco deve comparire come sottoblocco di uno successivo?

Friedman ha dimostrato che, per qualunque alfabeto finito, esiste una lunghezza massima per le parole con la proprietà descritta, che dipende ovviamente dal numero di lettere dell'alfabeto. Se ce n'è una sola, questa lunghezza è tre. Se ce ne sono due, è 11. Se tre, la lunghezza della parola fa un salto enorme. Ma se le lettere sono quattro, il risultato polverizza il record di Graham e Rothschild, perché si ottiene con un procedimento analogo al loro, ma iterando l'esponenziale non solo 64 volte, ma centinaia di migliaia di volte. A dimostrazione del fatto che anche problemi apparentemente banali possono richiedere soluzioni incredibilmente complicate.