

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)



Le metamorfosi di Maxwell

La matematica ha fornito gli strumenti per generalizzare le equazioni di Maxwell e la fisica le ha restituito il favore

Le equazioni che James Clerk Maxwell pubblicò nel 1865, armonizzando fra loro le leggi sull'elettricità e sul magnetismo scoperte da Coulomb, Gauss, Ampère e Faraday, costituirono la prima unificazione di due forze fisiche apparentemente separate, elettricità e magnetismo, in un'unica forza chiamata elettromagnetismo.

Le equazioni di Maxwell si rivelarono essere perfettamente compatibili con la teoria della relatività. Innanzitutto, le onde elettromagnetiche da esse previste risultarono viaggiare nel vuoto alla velocità della luce (c), che comparì inaspettatamente nelle equazioni sotto forma dell'inverso della radice quadrata del prodotto delle costanti di permittività elettrica (ϵ_0) e magnetica (μ_0). Inoltre, nel 1905 Albert Einstein dimostrò che le equazioni di Maxwell sono intrinsecamente relativistiche, e risultano invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Nel mondo dei quanti

Dal canto suo, anche la meccanica quantistica risultò compatibile con le equazioni di Maxwell, grazie alla lunga elaborazione collettiva dell'elettrodinamica quantistica (QED) culminata nelle equivalenti formulazioni di Tomonaga, Schwinger e Feynman, che valse loro il premio Nobel per la fisica nel 1965. In particolare, in questa nuova teoria risultò essere fondamentale una simmetria di scala (*gauge*) che lascia invariate le equazioni di Maxwell quantizzate, e ha la struttura matematica di un gruppo commutativo chiamato $U(1)$: cioè, il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi unitari.

L'idea di estendere le equazioni di Maxwell mantenendone la simmetria di scala, ma cambiando il gruppo a seconda della forza considerata, fu proposta da Yang e Mills nel 1954: da allora la teoria dei gruppi divenne uno strumento essenziale per lo sviluppo della fisica teorica. Il salto di qualità consistette nel passa-

re dal gruppo commutativo $U(1)$ a quello non commutativo $SU(2)$: cioè, il gruppo moltiplicativo dei quaternioni unitari.

In origine Yang e Mills speravano di trattare in tal modo la forza nucleare forte, responsabile del confinamento dei quark e della coesione dei nuclei atomici. Ma in seguito si scoprì che così si ottiene invece una generalizzazione delle equazioni di Maxwell per la forza nucleare debole, responsabile del decadimento radioattivo: una teoria chiamata QFD, perché fa intervenire i cosiddetti «sapori» (*flavor*) dei quark, che è valsa a Glashow, Salam e Weinberg il premio Nobel per la fisica nel 1979. Inoltre, moltiplicando i due gruppi $U(1)$ e $SU(2)$ si ottiene un'unificazione delle due forze elettromagnetica e nucleare debole nella cosiddetta forza elettrodebole.

La corretta generalizzazione delle equazioni di Maxwell per la forza nucleare forte deriva invece dall'invarianza di scala relativa al gruppo $SU(3)$, che è una versione più complicata di $SU(2)$: una teoria chiamata cromodinamica quantistica (QCD), perché fa intervenire i «colori» dei quark, valsa a Gross, Wilczek e Politzer il Nobel per la fisica nel 2004. Inoltre, moltiplicando i tre gruppi $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$ si ottengono le equazioni del modello standard.

Cortesie reciproche

Se la matematica ha fornito alla fisica gli strumenti per generalizzare le equazioni di Maxwell, la fisica ha restituito il favore alla matematica. L'uso delle equazioni invarianti rispetto al gruppo $SU(2)$ ha infatti permesso a Donaldson di classificare le superfici topologiche a quattro dimensioni, e di vincere la medaglia Fields nel 1986.

E uno dei sette problemi del millennio, con un premio di un milione di dollari in palio, riguarda invece il difficile calcolo esatto della massa della particella più leggera prevista dalle equazioni invarianti rispetto al gruppo $SU(3)$.