di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e *visiting professor* alla Cornell University di Ithaca (New York)

I numeri della lotta per la vita

La relazione tra prede e predatori può essere descritta da equazioni, come ha dimostrato Vito Volterra

Nel 1926, il biologo marino Umberto D'Antona notò che la diminuzione della pesca nell'Adriatico settentrionale causata dalle attività belliche della prima guerra mondiale non sembrava aver modificato la popolazione ittica perché i pescatori continuavano a pescare la stessa quantità di pesce di prima, ma sembrava aver invece modificato il rapporto tra prede e predatori, perché i pescatori pescavano più predatori e meno prede di prima.

D'Antona propose al matematico Vito Volterra, suo genero, di spiegare matematicamente il fenomeno, e questi trovò un modello del sistema preda-predatore che divenne famoso, basato su quella che oggi si chiama equazione di Lotka-Volterra: anche Alfred Lotka l'aveva infatti trovata l'anno prima, arrivandoci da un punto di vista diverso.

Partendo dallo studio delle reazioni autocatalitiche in chimica, Lotka si era posto il problema di descrivere la dinamica di una popolazione costituita di una sola specie x che varia nel tempo t: nell'ipotesi che la natalità e la mortalità siano costanti, si arriva all'equazione $dx/dt = ax$, che ha come soluzione l'irrealistica crescita esponenziale prevista da Thomas R. Malthus nel 1798.

Un comportamento caotico

Nell'ipotesi più realistica che la crescita non sia costante, a causa della limitazione delle risorse, si può supporre in prima approssimazione che essa diminuisca in maniera lineare. Lotka arrivò in tal modo nel 1910 all'equazione $dx/dt = ax(1-x)$, e riscoprì così l'equazione logistica già scoperta da Pierre François Verhulst nel 1938. Come dimostrò Robert May nel 1976, le soluzioni dell'equazione logistica sono variegate: a seconda del coefficiente di crescita, infatti, la popolazione può estinguersi, stabilizzarsi su un valore limite od oscillare fra due o più limiti.

Come ci si può attendere dal fatto che già il caso di una sola specie porti a un comportamento letteralmente «caotico», passando a due specie x e y le cose si complicano ancora.

Lotka e Volterra supposero anzitutto che le due specie interagissero in maniera simmetrica: che l'aumento dei predatori y facesse diminuire le prede x, ma che l'aumento delle prede x facesse crescere i predatori y. Supponendo ancora una volta che questi effetti reciproci siano lineari, si arriva alle equazioni $dx/dt = ax(1-y)$ e $dy/dt = by(x-1)$, pubblicate rispettivamente da Lotka nel 1925 e da Volterra nel 1926. Come nel caso di una sola specie, le soluzioni prevedono la possibilità di un'oscillazione delle due popolazioni, in accordo con le osservazioni che D'Antona aveva proposto a Volterra di spiegare.

Variazioni sul tema

Un difetto delle equazioni originarie di Lotka e Volterra sta nel fatto che suppongono che i cambiamenti di una specie siano influenzati solo dai cambiamenti dell'altra. La mancanza di una delle due specie fa dunque sì che l'equazione che regola il comportamento dell'altra ritorni a essere l'irrealistica equazione malthusiana da cui era partito Lotka, e preveda in particolare una crescita esponenziale dell'unica specie rimasta in gioco.

Volterra ovviò a questo difetto pubblicando nel 1931 variazioni sul tema. La più semplice suppone che i cambiamenti di una specie siano non solo influenzati dai cambiamenti dell'altra, ma anche dai propri. Rimanendo nell'ambito dei cambiamenti lineari, si arriva alle più realistiche equazioni $dx/dt = ax(1-x-y)$ e $dy/dt = by(x-y-1)$, che stanno alle equazioni originali di Lotka e Volterra come l'equazione logistica sta all'equazione malthusiana.

Volterra considerò poi molte altre estensioni delle equazioni originarie, continuando fino al 1939, l'anno prima di morire, la sua lunga meditazione sulle applicazioni della matematica alla biologia.