

di Pierngiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino  
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)



## Dubbi e certezze

### In matematica non esistono problemi assolutamente insolubili

Nel 1872, in un articolo sui limiti della nostra comprensione della natura (*Über die Grenzen des Naturerkennens*), il fisiologo tedesco Emil Heinrich Du Bois-Reymond coniò quello che secondo lui poteva o doveva essere il motto della scienza, che spesso si trova di fronte a domande non solo insolute, ma insolubili: *ignoramus et ignorabimus*, «non sappiamo e non sapremo». O, con una traduzione un po' più libera, «non possiamo sperare che tutti i nostri dubbi si tramuteranno un giorno in certezze».

Nel 1880, in una conferenza all'Accademia prussiana delle scienze a Berlino, Du Bois-Reymond specificò alcuni esempi di quelli che considerava problemi insolubili, isolando una lista di «sette enigmi cosmici»: la natura ultima della materia e della forza, l'origine del movimento, l'origine della vita, l'apparente teleologia della natura, l'origine delle sensazioni, l'origine del pensiero intelligente e la questione del libero arbitrio.

Il motto *ignoramus et ignorabimus* divenne popolare, non solo in Germania, e il tentativo più noto di confutarlo fu fatto da David Hilbert l'8 settembre 1930 a Königsberg.

In occasione del suo pensionamento gli venne offerta la cittadinanza onoraria della città in cui era nato e cresciuto, ed egli pronunciò un famoso discorso su *Conoscenza della natura e logica*, di cui lesse un breve estratto alla radio tedesca. La sua conclusione fu: «Una volta il filosofo Comte, volendo menzionare un problema insolubile, disse che la scienza non sarebbe mai riuscita a conoscere a fondo il segreto della composizione chimica dei corpi celesti, ma alcuni anni più tardi questo problema fu risolto mediante l'analisi spettrale di Kirchhoff e Bunsen. Il vero motivo per cui Comte non riuscì a trovare un problema insolubile sta, a mio parere, nel fatto che non esiste alcun problema insolubile. Al posto dello stolto *ignorabimus*, il nostro motto è invece *wir müssen wissen, wir werden wissen*, "dobbiamo sapere, sapremo"».

Le parole finali furono incise sulla tomba di Hilbert a Gottinga, ma paradossalmente le aveva pronunciate il giorno dopo, e nello stesso luogo, in cui Kurt Gödel aveva annunciato al mondo il suo famoso teorema di incompletezza: il fatto, cioè, che in qualunque sistema formale della matematica contenente un minimo di arit-

metica ci sono proposizioni indecidibili, che non possono essere né dimostrate, né refutate.

La prima impressione è dunque che Gödel abbia confermato il motto di Du Bois-Reymond e refutato quello di Hilbert, ma non bisogna essere troppo affrettati. Le proposizioni indecidibili sono tali appunto all'interno di una particolare formalizzazione della matematica, ma possono diventare decidibili in altre formalizzazioni. Ciò che il teorema di incompletezza dimostra è che non può esistere una formalizzazione completa della matematica, come appunto dice il suo nome, ma questo non significa che esistano problemi assolutamente insolubili. Anzi, Gödel stesso pensava

che non ci fossero: dunque, il motto della tomba di Hilbert non avrebbe sfigurato neppure sulla sua.

Tra l'altro, Hilbert aveva già notato nel 1900, in un altro famoso discorso sui problemi matematici tenuto al Congresso Internazionale di Parigi: «Certamente ogni matematico condivide la convinzione che per ogni problema matematico determinato esista una sua soluzione, o perché viene data una risposta alla domanda sollevata dal problema, o perché si dimostra che è impossibile dare una tale risposta».

E proseguiva domandandosi: «Questo assioma della risolubilità di ogni problema è una peculiarità tipica del pensiero matematico, o è forse una legge generale inerente all'intima natura del nostro intelletto, quella per cui esso è capace di dare risposta a tutte le domande che si pone? In tutte le scienze, infatti, compaiono antichi problemi che

sono stati risolti soddisfacentemente e utilmente con dimostrazioni di impossibilità». Esempi matematici di questi antichi problemi sono l'irrazionalità della radice quadrata di 2, l'impossibilità della quadratura del cerchio mediante riga e compasso, l'indipendenza dell'assioma delle parallele, e l'insolubilità dell'equazione generale di quinto grado mediante radicali.

Hilbert aveva dunque le sue ragioni a rifiutare il motto di Du Bois-Reymond: «Questa convinzione della risolubilità di ogni problema matematico è per noi uno stimolo durante il lavoro. Dentro di noi udiamo continuamente l'appello: "Ecco il problema, cerca la soluzione! La puoi trovare mediante il puro pensiero, perché in matematica non c'è nessun *ignorabimus*"».



**Mente eccelsa.** Il tedesco David Hilbert, considerato uno dei più grandi matematici di ogni tempo.