

di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)



Che barba, la matematica!

Dal punto di vista matematico barba e capelli sono assai interessanti

Le interminabili e oziose discussioni filosofiche spesso fanno venire la barba, ma anche la barba stessa può a sua volta diventare oggetto di interminabili e capziose discussioni logiche. Lo dimostra un paradosso esposto da Bertrand Russell in *La filosofia dell'atomismo logico* (1918), oggi noto appunto come «paradosso del barbiere».

Si tratta di uno dei tanti modi escogitati da Russell per divulgare *urbi et orbi* un paradosso più tecnico che egli stesso aveva trovato nel 1903, e che aveva scosso i fondamenti della matematica. La divulgazione in questione era la seguente: «Il mio paradosso è estremamente interessante. Si può modificare in vari modi, alcuni validi e altri no. Una volta qualcuno me ne presentò una modifica non valida, domandando se un barbiere rade se stesso oppure no. Si può convenire che un barbiere rade tutti e solo quelli che non si radono da sé, e allora il problema diventa: chi rade il barbiere?»

La considerazione di un simile barbiere è effettivamente paradossale, perché se egli non si rade, allora è una delle persone che deve radere, e se si rade, è una delle persone che non può radere. Ma questo significa soltanto che un tale barbiere non esiste. O meglio, che nessun barbiere può soddisfare la convenzione fatta. Questa forma di paradosso è dunque innocua, perché dimostra solo che si è data una definizione impossibile.

In genere i barbieri offrono trattamenti completi di «barba e capelli», e anche questi ultimi sono interessanti dal punto di vista matematico. Il calvo David Hilbert, per esempio, affermò un giorno a lezione di sapere che nell'aula c'era uno studente che aveva il massimo numero di capelli. La dimostrazione è semplice, perché ogni studente ha un numero finito di capelli, e nell'aula c'è un numero finito di studenti: si possono dunque ordinare gli studenti in base al numero dei loro capelli in una lista finita, che deve avere un primo elemento.

Naturalmente, il primo posto potrebbe essere condiviso, perché ci possono essere due o più studenti con lo stesso numero di capelli. Ma in una città come Roma ci devono essere almeno dieci cittadini con lo stesso numero di capelli. Gli abitanti sono infatti

circa tre milioni, e possiamo supporre che almeno due milioni non siano calvi. Ora, il massimo numero di capelli che una persona può avere è circa 200.000. Dunque, il numero delle persone non calve è almeno dieci volte maggiore del numero dei capelli possibili: se anche la distribuzione dei capelli fosse uniforme, ci devono essere almeno dieci ripetizioni dello stesso numero.

Queste dimostrazioni sembrano trucchi, ma in realtà sono esempi di ciò che si fa nella matematica classica. È solo nella matematica costruttiva che non si accettano le dimostrazioni esistenziali che non forniscano esempi concreti di ciò di cui asseriscono l'esistenza: nei casi precedenti, che non indichino espressamente

uno studente che ha il massimo numero di capelli nell'aula, o dieci abitanti con lo stesso numero di capelli a Roma.

Da questi esempi, sembrerebbe che la matematica classica sia un luogo in cui si «pettinano le bambole». Ma, a volte, si pettinano anche le palle da tennis, e più in generale le palle pelose: in questo caso, il famoso teorema del punto fisso di Brouwer dimostra che ci deve essere almeno una chierica, o una riga. Il che spiega perché i barbieri di solito propongano acconciature di quel genere, benché una testa normale (cioè, attaccata al collo e non completamente ricoperta di capelli) non sia una palla pelosa, e in quel caso il teorema non valga: infatti, si possono pettinare tutti i capelli all'indietro.

In termini matematici il teorema di Brouwer dice che su una superficie topologicamente equivalente

a una sfera non esiste un campo di vettori tangenti che sia allo stesso tempo continuo e mai nullo. Una sua più seria applicazione alla circolazione dell'atmosfera terrestre spiega perché sul pianeta ci sia sempre almeno un punto in cui il vento è nullo, che corrisponde all'occhio di un ciclone o di un anticiclone.

I buchi neri invece non hanno peli o capelli, secondo una terminologia coniata da John Wheeler per un teorema della relatività generale che asserisce che la materia che cade in un buco nero sparisce e non lascia tracce «pelose», a parte l'informazione «corposa» sulla massa, la carica elettrica e il momento angolare. È dunque inutile tirare per i capelli la divulgazione al riguardo, anche se purtroppo e troppo spesso accade comunque.



Mestiere paradossale. Per illustrare un paradosso, il filosofo Bertrand Russell usò la figura del barbiere.