di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Il teorema della pizza

Perché le fette di pizza non si piegano all'ingiù se solleviamo il bordo all'insù

Per quale motivo, quando solleviamo una fetta di pizza dal piatto piegandone il bordo all'insù, la fetta non si piega all'ingiù per la gravità, come invece fa se non pieghiamo il bordo? La risposta sta in un risultato di Carl Friedrich Gauss, che lo stesso Principe di Matematici, pur ben noto per la sua esigenza e il suo perfezionismo, chiamò soddisfatto «teorema egregio».

L'enunciato e la dimostrazione si trovano nelle sue *Disquisizioni generali sulle superfici curve*, pubblicate in latino nel 1827 e subito diventate una pietra miliare della geometria differenziale. Si tratta del fatto che *si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet*: cioè, «se una superficie curva viene dispiegata su una qualunque altra superficie, la misura della curvatura rimane invariata in ciascun punto».

Il motivo per cui il risultato è «egregio» sta nel fatto che la curvatura di una superficie, che preciseremo tra un momento, viene definita mediante misure prese nello spazio. È dunque sorprendente che essa non dipenda dal modo in cui queste misure sono effettuate, e non cambi quando la superficie viene piegata o spiegata nello spazio: per esempio, quando un foglio di carta viene arrotolato o srotolato, o un pallone di cuoio viene gonfiato o sgonfiato.

Per definire la curvatura di una superficie si procede per passi. Anzitutto si stabilisce che la curvatura di un cerchio è l'inverso del suo raggio, in accordo con il linguaggio comune che considera un tratto di strada tanto più curvo quanto più il suo raggio è piccolo, e tanto meno curvo quanto più il suo raggio è grande. Come caso limite, una strada dritta ha curvatura zero e raggio infinito.

In seguito si stabilisce che la curvatura di una curva in un suo punto, definita da Isaac Newton nel 1671 e da Christiaan Huygens nel 1673, è la curvatura del cerchio che approssima la curva in quel punto. Questo cerchio, detto «osculatore» o «combaciante» (da *osculum*, «boccuccia»), si ottiene come limite dei cerchi che passano per quel punto e per due altri punti vicino a esso, situati su lati opposti della curva e tendenti al punto in questione, nel senso che gli si avvicinano sempre più.

Infine si stabilisce che la curvatura di una superficie in un suo punto, definita da Leonhard Euler nel 1767, è il prodotto della minima e della massima curvatura in quel punto delle curve ottenute sezionando la superficie con piani perpendicolari al piano tangente e passanti per quel punto. Per esempio, la sfera ha come curvatura in ogni suo punto l'inverso del quadrato del suo raggio, perché le sue sezioni con piani perpendicolari al piano tangente sono cerchi massimi della sfera, e ciascuno ha come curvatura l'inverso del raggio. Il cilindro ha invece curvatura nulla in ogni suo punto, perché una delle sue sezioni con piani perpendicolari al piano tangente è sempre una retta.

Compensazione. Piegando insù il bordo si compensa la curvatura ingiù della punta.

Iaroslav Neliubov/Shutterstock

Per poter calcolare la curvatura di una superficie secondo la definizione appena data è però necessario effettuare misure al di fuori di essa, passando attraverso lo spazio che la contiene, nel lavoro citato, però, Gauss dimostrò che è anche possibile calcolare la curvatura mediante misurazioni effettuate solo sulla superficie stessa. Per esempio, per calcolare la curvatura della Terra non è necessaria osservarla dallo spazio, ed è sufficiente tracciare un quadrilatero consistente di una base e due lati perpendicolari della stessa lunghezza: misurando il lato opposto alla base ci si accorge che è più corto di essa, e dal rapporto fra le lunghezze si possono calcolare il raggio e la curvatura.

Il teorema egregio stabilisce che la curvatura di una superficie non cambia in nessun punto, quando la superficie viene piegata o dispiegata. Da un lato, questo impedisce a una porzione di sfera di essere distesa sul piano senza strappi, perché la sfera ha curvatura costante positiva e il piano curvatura costante nulla: non ci possono dunque essere carte geografiche perfette, e la cartografia studia appunto i modi migliori per limitare i danni.

Dall'altro lato, il teorema egregio permette però alle fette di pizza di non piegarsi all'ingiù, se si solleva il bordo all'insù: la fetta distesa ha infatti curvatura costante nulla, e deve mantenerla anche quando viene sollevata. Quando il bordo viene piegato assume una curvatura positiva, che dev'essere compensata da una curvatura nulla in un'altra direzione: detto altrimenti, la pizza deve rimanere distesa, e questo ci permette di mangiarla senza impiastricciarci.