



Mettere palline nelle scatole

Statistiche di termodinamica e fisica delle particelle spiegate in modo semplice

Secondo una definizione ormai classica di Giancarlo Rota, l'eccentrico matematico e filosofo del Massachusetts Institute of Technology, che aveva per zii il compositore Nino Rota e lo scrittore Ennio Flaiano, «la combinatoria è l'arte di vedere in quanti modi si possono mettere palline di colori diversi in scatole di colori diversi». Sembra il gioco più facile del mondo: almeno se le palline e le scatole sono quello che di solito intendiamo, e i colori servono solo a distinguere facilmente fra loro le une e le altre.

Per esempio, supponiamo di avere due palline diverse, dunque distinguibili fra loro, e di vedere in quanti modi si possono mettere in due scatole diverse. Ce ne sono ovviamente quattro: si possono infatti mettere entrambe le palline nella prima scatola, entrambe le palline nella seconda scatola, la prima pallina nella prima scatola e la seconda pallina nella seconda scatola, o la seconda pallina nella prima scatola e la prima pallina nella seconda scatola.

Calcoli di questo genere sono alla base di quella che in fisica è chiamata la statistica di Maxwell e Boltzmann, adottata nel 1860 da James Clerk Maxwell nelle *Illustrazioni della teoria dinamica dei gas*, e nel 1872 da Ludwig Boltzmann negli *Ulteriori studi sull'equilibrio termico tra le molecole di un gas*. Come si intuisce fin dai titoli dei loro contributi, nella statistica di Maxwell e Boltzmann le palline sono le molecole di un gas, e i loro colori i microstati determinati da posizioni, masse e velocità. Le scatole sono invece i recipienti, e i loro colori i macrostati determinati da pressioni, volumi, temperature e densità.

Una delle proprietà fondamentali alla base della statistica di Maxwell e Boltzmann è che, analogamente a due palline diverse, anche due molecole diverse sono distinguibili fra loro. Ma se due palline diverse fossero indistinguibili fra loro, ci sarebbero invece soltanto tre modi di metterle in due scatole diverse, invece di quattro. Infatti, si potrebbero mettere entrambe le palline nella prima scatola, entrambe le palline nella seconda scatola, o una pallina nella prima scatola e l'altra nella seconda scatola. Ma scambiando le due palline fra loro non si vedrebbe nessuna differenza, appunto perché esse sono indistinguibili fra loro.

Calcoli di questo genere sono alla base di quella che viene chiamata in fisica la statistica di Bose e Einstein, adottata nel 1920 da Satyendra Bose in *Legge di Planck e l'ipotesi dei quanti di luce*, e nel 1924 da Albert Einstein in *Teoria quantistica del gas ideale monoatomico*. Come si intuisce ancora una volta dai titoli, nella statistica di Bose e Einstein le palline sono i fotoni (e, più in generale, i cosiddetti bosoni, come le particelle che mediano le forze o il famoso bosone di Higgs), oppure le molecole dei gas in cui tutte le molecole hanno lo stesso microstato (oggi chiamati appunto «condensati di Bose e Einstein»).

Una delle proprietà fondamentali alla base della statistica di Bose e Einstein è che due fotoni (e, più in generale, due bosoni dello stesso tipo) possono stare nello stesso stato quantistico, che corrisponde alla scatola. Ma se due palline diverse fossero non solo indistinguibili fra loro, ma non potessero stare in una stessa scatola, ci sarebbe un unico modo di metterle in due scatole diverse, invece di tre. Infatti, si potrebbe soltanto metterne una nella prima scatola e l'altra nella seconda.

Calcoli di questo genere stanno alla base di quella che è chiamata in fisica la statistica di Fermi e Dirac, adottata nel 1926 da Enrico Fermi in *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico* e da Paul Dirac in *Sulla teoria della meccanica quantistica*. Nella statistica di Fermi e Dirac le palline sono gli elettroni (e, più in generale i cosiddetti fermioni, come le particelle che costituiscono gli atomi),

la cui proprietà caratteristica è soddisfare il principio di esclusione di Pauli, che impedisce appunto a più di un fermione di uno stesso tipo di occupare lo stesso stato quantistico.

La probabilità di trovare due particelle dello stesso tipo nello stesso stato è $2/3$ per i bosoni che mediano le forze o le molecole che compongono i condensati, $1/2$ per le molecole che compongono i gas e 0 per i fermioni che costituiscono gli atomi. In ultima analisi, dunque, le differenze di comportamento fisico tra le particelle si riducono alle differenze matematiche tra le tre statistiche, a conferma dell'«irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali», secondo la felice espressione del premio Nobel per la fisica Eugene Wigner.



Similitudine. Le palline colorate aiutano a visualizzare la distribuzione di atomi e particelle secondo statistiche diverse.