

di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)



L'uomo dei quaternioni

Come estendere a quattro dimensioni i numeri complessi a due dimensioni

Il 16 ottobre 1843 William Hamilton, astronomo reale irlandese, andò a piedi dall'Osservatorio di Dunsink, dove risiedeva e lavorava, Royal Academy di Dublino, per partecipare a una riunione. Le due istituzioni distavano una decina di chilometri, e il matematico era solito percorrerle lungo il Canale reale. Nell'occasione era accompagnato dalla moglie, che lo intratteneva chiacchierando, mentre lui lasciava vagare liberamente il pensiero.

Passando sotto il Brougham Bridge, Hamilton ebbe una *flash* di ispirazione improvvisa, che divenne famoso come il sogno di Kekulé sulla struttura del benzene, e divinò la struttura dei quaternioni. Scrisse immediatamente le equazioni fondamentali su un taccuino, e nell'entusiasmo le incise anche sulla pietra del ponte, dove oggi una lapide le ricorda in maniera più leggibile e meno vandalica: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Il problema che da tempo assillava il matematico era come estendere in più dimensioni i numeri complessi a due dimensioni, noti fin dal Cinquecento. In una successiva lettera al figlio Archibald, che ricrea l'atmosfera familiare della sua ricerca, ricordò: «Nella prima metà di ottobre 1843, quando scendevo a colazione, tutte le mattine tu e tuo fratello mi domandavate se ero riuscito a moltiplicare le terne, ma io dovevo rispondere, scuotendo tristemente la testa, che continuavo solo a saperle aggiungere e sottrarre».

Ma quel 16 ottobre, come spiegò il giorno successivo in una lettera a John Graves, «mi venne in mente che per poter calcolare con le terne era necessario introdurre, in un certo senso, una quarta dimensione: fu come se un circuito elettrico si chiudesse, e ne scaturisse una scintilla». In altre parole, i numeri complessi si potevano generalizzare, ma saltando da due a quattro dimensioni. Proprio Graves intuì, poche settimane dopo, che si poteva introdurre un'ulteriore generalizzazione saltando da quattro a otto dimensioni. Nacquero così i quaternioni e gli ottonioni.

Col senno di poi, il motivo per cui la generalizzazione corretta richiedesse quaterne, invece che terne, è presto detto. Come i numeri complessi $a + ib$ si possono interpretare come coppie di nu-

meri reali (a, b) , così i quaternioni si possono interpretare come coppie di numeri complessi $(a + ib, c + id)$. O, se si preferisce, come numeri «ipercomplessi» $(a + ib) + j(c + id)$ costruiti a partire da numeri complessi, invece che da numeri reali, e usando una nuova unità immaginaria j analoga a quella vecchia i , e con la stessa proprietà che $i^2 = j^2 = -1$.

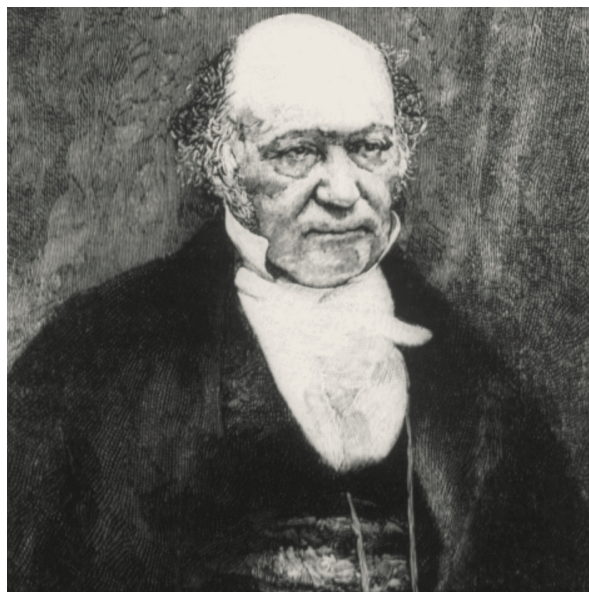
Moltiplicando questi numeri «ipercomplessi» in maniera naturale si scopre che si riducono a espressioni coinvolgenti non solo i e j , ma anche il loro prodotto ij . Ponendo quest'ultimo uguale a k si ottiene la terza componente mancante, e la simmetria con le altre due richiede che $k^2 = -1$, e dunque anche $ijk = -1$.

In tal modo i quaternioni si riducono tutti a espressioni del tipo $a + ib + jc + kd$. E in maniera analoga si ottengono gli ottonioni attraverso coppie di quaternioni, o «iperquaternioni» costruiti a partire da numeri complessi, invece che da numeri reali.

Una volta scoperte le leggi fondamentali, Hamilton si buttò sull'argomento e lo sviluppò in maniera sistematica. In particolare, si accorse che si trattava di un'algebra non commutativa: infatti, $ij = -ji$. La stessa cosa vale per gli ottonioni, che inoltre risultarono essere anche un'algebra non associativa, in cui $(ab)c$ non è in genere uguale ad $a(bc)$. Nonostante queste stranezze, anzi proprio a causa loro, entrambe queste algebre si rivelarono molto utili nei campi più svariati, dallo studio delle rotazioni nello spazio alla teoria delle stringhe.

Ci si accorse poi che una proprietà fondamentale dei quaternioni era stata prefigurata da Eulero nel 1748, con la scoperta che il prodotto di due somme di quattro quadrati è ancora una somma di quattro quadrati, conseguenza del fatto che la norma del prodotto di due quaternioni è uguale al prodotto delle norme, analogamente a ciò che avviene per numeri complessi e somme di due quadrati.

Grazie ai quaternioni, oltre che per la sua formulazione della meccanica classica in termini variazionali (*si veda la rubrica di settembre*), Hamilton è considerato il più grande matematico irlandese. E quest'anno a Dublino e Dunsink si è celebrato in pompa magna il centocinquantésimo anniversario della sua morte, avvenuta il 2 settembre 1865.



Ritratto. L'irlandese William Hamilton, fertile mente matematica della prima metà del XIX secolo.