di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

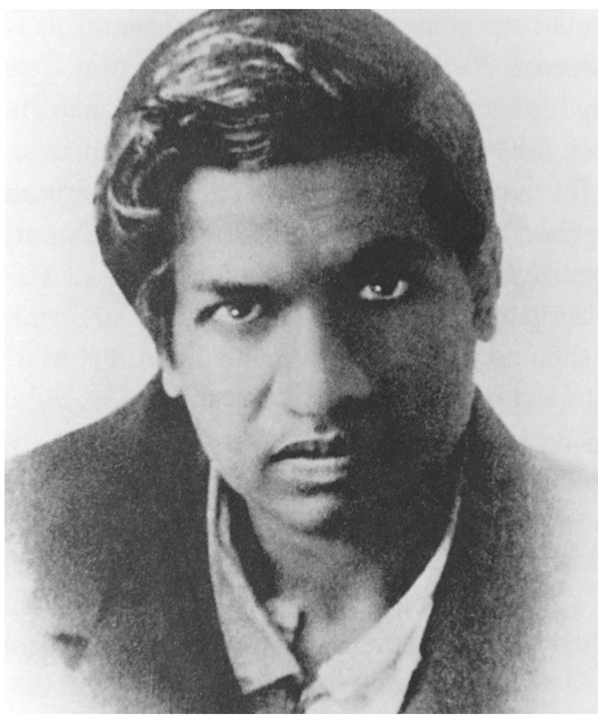
Difficoltà esponenziali

Alcuni problemi sono semplici da enunciare ma assurdamente difficili da risolvere

Tra le tante curiosità elementari riguardanti i numeri piccoli, una delle più profonde è il fatto che 8 e 9 differiscono per una sola unità. La curiosità risiede nel fatto che 8 è un cubo, e 9 un quadrato: si tratta dunque di due potenze, rispettivamente di 2 e di 3, che insieme forniscono una soluzione all'equazione diofantea esponenziale $3^n - 2^m = \pm 1$. L'aggettivo «diofanteo» indica il tipo di equazioni polinomiali a valori interi studiate da Diofanto verso il 250 della nostra era, mentre «esponenziale» specifica che alcune delle incognite stanno appunto a esponente.

Nel 1343 il talmudista francese Levi ben Gershon, detto Gersonide, dimostrò nell'*Armonia dei numeri* che le uniche altre potenze di 2 e 3 che differiscono per una sola unità sono le coppie (1,2), (2,3) e (3,4), che corrispondono a esponenti banali. Detto altrimenti, l'equazione precedente non ha altre soluzioni non banali, oltre a (8,9).

Il padre di Gersonide si chiamava Catalan, e per ironia della sorte fu proprio il matematico francese Eugène Catalan, nel 1844, a domandarsi se 8 e 9 fossero le uniche due potenze non banali, in qualunque base, che differiscono per una sola unità. La risposta positiva divenne nota come congettura di Catalan, ed è stata confermata soltanto nel 2002 da Preda Mihailescu, con una complicata dimostrazione. In altre parole, a non avere soluzioni non banali oltre a (8,9) non è solo l'equazione precedente, ma anche la più generale $x^n - y^m = \pm 1$.



Mente eccelsa. Srinivasa Ramanujan, uno dei più grandi matematici di sempre, nato nel 1887 e deceduto nel 1920.

Questa situazione è tipica della teoria dei numeri in generale, e delle equazioni diofantee esponenziali in particolare: problemi semplici da enunciare, suggeriti da ovvi esempi, si rivelano assurdamente difficili da risolvere. Il caso più conosciuto è quello dell'ultimo teorema di Fermat, enunciato nel 1637, che richiedeva di determinare per quali esponenti n ci fossero soluzioni intere all'equazione $x^n - y^n = z^n$.

La dimostrazione, come è noto, richiese 350 anni di ricerche e fu trovata da Andrew Wiles nel 1995. Come già per la congettura di Catalan, anche per l'ultimo teorema di Fermat l'unica soluzione risultò quella già nota da tempi immemorabili: il caso dei quadrati e delle terne pitagoriche, come 3, 4 e 5, in cui banalmente 3 al quadrato più 4 al quadrato è uguale a 5 al quadrato.

A un altro esempio famoso si arriva, ancora una volta, partendo da osservazioni a prima vista innocue. Già i Pitagorici avevano introdotto i numeri triangolari, che si possono rappresentare disponendo pallini a triangolo, si generano mediante la formula $z(z + 1)/2$ e sono 1, 3, 6, 10, 15, eccetera. Fu invece padre Marin Mersenne ad attirare, nei *Pensieri fisico-matematici* del 1644, l'attenzione sui numeri che differiscono di un'unità dalle potenze di 2 e si generano mediante la formula $2^m - 1$ e sono 1, 3, 7, 15, eccetera.

Come si vede, 1, 3 e 15 appartengono a entrambe le liste, e sono dunque numeri di Mersenne triangolari. Per trovare anche i rimanenti basta uguagliare le formule che descrivono i numeri triangolari da un lato e i numeri di Mersenne dall'altro. In un paio di passaggi si arriva a un'equazione diofantea esponenziale del tipo $2^{m+3} = (2z + 1)^2 + 7$.

Nel 1913 Srinivasa Ramanujan annunciò, senza dimostrazione, che l'equazione $2^n = x^2 + 7$ ha soluzioni solo per n uguali a 3, 4, 5, 7 e 15, corrispondenti a valori di x pari a 1, 3, 5, 11 e 181. La sua affermazione divenne nota come congettura di Ramanujan, fu riproposta indipendentemente nel 1943 da Wilhelm Ljunggren e dimostrata nel 1948 da Trygve Nagell, entrambi matematici norvegesi.

Per quanto riguarda i numeri di Mersenne triangolari, il valore 3 non è applicabile perché produce un esponente 0. Dai valori 4, 5 e 7 si ricavano gli esponenti 1, 2 e 4, e dunque i numeri 1, 3 e 15, che già conoscevamo. E dal valore 15 si ricavano l'esponente 12 e il numero 4095. Poiché l'equazione di Ramanujan non ha altre soluzioni, la lista 1, 3, 15 e 4095 esaurisce l'insieme dei numeri di Mersenne triangolari. Un altro bell'esempio di problema semplice a soluzione complicata: anzi, si può ben dire, di difficoltà esponenziale.

SPL/Contrasto