

La storia della geometria non euclidea tra le intuizioni di Beltrami e i dubbi di un certo ingegner Dostoevskij

La matematica dei fratelli Karamazov

PIERGIORGIO ODIFREDDI

Nella seconda parte dei "Fratelli Karamazov" Ivan e Alioscia hanno una lunga conversazione teologica in trattoria, nel corso della quale il primo se ne esce sorprendentemente con queste parole: «Posto che Dio esista, e che abbia realmente creato la Terra, questa, come tutti sappiamo, è stata creata secondo la geometria euclidea, e l'intelletto umano è stato creato idoneo a concepire soltanto uno spazio a tre dimensioni. Vi sono stati, invece, e vi sono pure ora, geometri e filosofi, anche fra i più grandi, i quali dubitano che tutta la natura, o più in generale tutto l'universo, siano stati creati secondo la geometria euclidea. E s'avventurano perfino a supporre che due linee parallele, che secondo Euclide non possono a nessun patto incontrarsi sulla Terra, potrebbero anche incontrarsi prima o poi nell'infinito». La sorpresa però svanisce

quando si tiene conto di due fatti. Anzitutto, che Dostoevskij era un ingegnere, laureatosi nel 1843 all'Università Politecnica Militare di San Pietroburgo. E poi, che la geometria non-euclidea alla quale egli alludeva nel 1879 era un'invenzione russa del 1829, diventata nel frattempo di dominio pubblico in tutta l'Europa, e certo non dimenticata nel suo paese.

In realtà, fin dagli inizi dell'Ottocento i tempi erano ormai maturi per la scoperta o l'invenzione della geometria non-euclidea: una geometria, cioè, in cui «per un punto fuori di una retta passa più di una parallela alla retta data», invece che una sola come nella geometria euclidea. E, come spesso accade in matematica, quando i tempi sono ormai maturi se ne accorge più di una persona, e non una sola. Ma per la storia conta la prima che, oltre ad accorgersene, lo fa sapere al resto del mondo.

Nel caso della geometria non-euclidea questa persona fu appunto un russo di nome Nikolaj Lobachevskij, che nel 1826 tenne all'università di Kazan, oltre gli Urali, un'Esposizione succinta dei principi della geometria, con una dimostrazione rigorosa del teorema delle parallele.

Quasi un millennio prima un altro letterato, più sensibile alla matematica dell'ingegner Dostoevskij, era già stato attratto dalla possibilità di una geometria non-euclidea. Si trattava del poeta persiano Omar Khayyam, autore delle famose *Rubaiyat*, "Quartine", che l'Occidente ven-

ne a conoscere soltanto nell'Ottocento, in una libera e popolare traduzione inglese di Edward Fitzgerald. Khayyam intravede l'esistenza di tre tipi di geometrie, distinte tra loro dal fatto che le parallele a una retta data passanti per un punto fuori di essa sono rispettivamente nessuna, una o più. O, se si preferisce, dal fatto che la somma degli angoli di un triangolo è rispettivamente maggiore, uguale o minore di 180 gradi. La seconda geometria, quella intermedia in cui c'è una sola parallela e la somma degli angoli di un triangolo è uguale a 180 gra-

di, è ovviamente la geometria piana studiata ancor oggi nelle scuole. La prima, quella in cui non c'è nessuna parallela e la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180 gradi, è la geometria sferica. Le sue rette sono i meridiani, analoghi a quelli così chiamati sulla sfera terrestre. E poiché due meridiani si incontrano sempre in due poli opposti, non possono appunto mai essere paralleli. Il problema è capire come raffigurarsi la terza geometria, quella in cui ci sono più parallele e la somma degli angoli di un triangolo è minore di



LA CONFERENZA
 Piergiorgio Odifreddi oggi sarà tra i relatori della conferenza "Dalla Neva alle Alpi: avventure del pensiero matematico che scorrono attraverso la Scienza, l'Arte e la Musica", organizzata a San Pietroburgo nel Consolato Generale d'Italia. La sua lezione si concentrerà sulla figura di Eugenio Beltrami

180 gradi. Lobachevskij ne aveva descritte le proprietà, ma c'era il rischio che si trattasse della descrizione di un mondo puramente immaginario, senza nessun modello reale. Il primo a capire come raffigurarsela in termini concretamente visualizzabili fu Eugenio Beltrami nel 1868, nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*.

L'idea era che bisognava trovare qualcosa che fosse l'analogo, uguale e contrario, della sfera. Beltrami lo individuò in quella che egli chiamò pseudosfera: una strana superficie che in ogni punto aveva la stessa curvatura negativa, esattamente come la sfera in ogni punto ha la stessa curvatura positiva. E ne costruì a mano alcuni modelli, chiamati da un giornale satirico dell'epoca

prossimazione della pseudosfera si poteva ottenere raggruppando invece i triangoli sette a sette.

In seguito si è scoperto che queste cose esistono già bell'e fatte in natura. Molti organismi biologici, soprattutto marini, esibiscono infatti una geometria non-euclidea, dalle alghe kelp ai nudibranchi, e così fanno le foglie di lattuga e di cavolo nero. Ma proprio a causa dei loro tipici bordi ondulati, questi modelli non si possono distendere perfettamente sul piano. Beltrami inventò dunque altri modelli piani, mettendo le piastrelle della pavimentazione dentro un cerchio, e facendole diventare sempre più piccole man mano che si avvicinano al bordo, in modo da farcene stare infinite. Oggi questi modelli sono diventati famosi perché al

Quando Escher conobbe quelle teorie realizzò i suoi disegni più celebri

"cuffie della nonna", a causa del loro aspetto ondulato come i bordi dei cappelli da notte di pizzo di una volta.

Ad esempio, era noto fin dall'antichità che il piano si può pavimentare con piastrelle triangolari regolari, raggruppate sei a sei attorno ai vertici. I pitagorici avevano scoperto che se si raggruppano invece i triangoli cinque a cinque, si ottiene una superficie che si chiude su se stessa, e diventa un solido regolare chiamato icosaedro, così chiamato perché ha venti facce triangolari, che approssima una sfera. Beltrami capì che un'analogia ap-

Congresso Internazionale dei Matematici del 1954, che si tenne ad Amsterdam, il grafico Maurits Cornelis Escher ne venne a conoscenza e se ne innamorò. Dedicò dunque quattro opere ai *Limiti del cerchio*, la terza delle quali viene considerata la più bella raffigurazione del piano non-euclideo prefigurato dal persiano Khayyam, scoperto o inventato dal russo Lobachevskij, modellato dall'italiano Beltrami e rappresentato dall'olandese Escher, in un lavoro collettivo e millenario tipico delle imprese matematiche e scientifiche.

© RIPRODUZIONE RISERVATA

Raffaello Cortina Editore

DISUGUAGLIANZA

Che cosa si può fare?

ANTHONY B. ATKINSON