di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Il potere delle formule

Come ottenere due principi basilari della fisica con semplici passaggi matematici

Così recita una famosa citazione di Galileo, dal *Saggiatore* del 1623: «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto».

In realtà, oggi diremmo che Galileo aveva torto nella sua maniera di aver ragione, o ragione nella sua maniera di aver torto. I suoi famosi risultati sul moto uniformemente accelerato, descritti nei *Discorsi sopra due nuove scienze* del 1638, si esprimono infatti sì in lingua matematica, ma con i caratteri dell'analisi, invece che della geometria. Precisamente, i risultati di Galileo si riducono a dedurre per integrazione, dall'ipotesi che l'accelerazione sia costante, due semplici equazioni, cioè $v = at$ e $s = at^2/2$.

Mente eccelsa. Galileo Galilei aveva intuito il potere descrittivo della matematica rispetto ai fenomeni naturali.

Poiché le due formule determinano sia la velocità sia lo spazio in funzione del tempo, si può facilmente eliminare da esse il tempo e ottenerne una terza che leghi invece la velocità allo spazio: cioè, $as = v^2/2$. E ci si accorge, come successe per primo a Huygens, che la seconda e la terza formula forniscono un approccio alternativo alla meccanica, che dipende dallo spazio invece che dal tempo: da esse si ottengono, infatti, $v = \sqrt{2as}$ e $t = \sqrt{2s/a}$.

Agli inizi, in una lettera del 1604 a Paolo Sarpi, Galileo aveva confuso i due approcci, immaginando che la velocità fosse proporzionale non al tempo, ma allo spazio: cioè $v = cs$, supponendo, come aveva d'altronde già fatto Alberto di Sassonia nelle *Questioni sottilissime*. Un errore che oggi noi non possiamo più ripetere, perché vediamo immediatamente che la soluzione dell'equazione differenziale è una funzione esponenziale, che non può mai essere nulla; dunque non può descrivere il moto di un corpo che parta da uno stato di quiete.

Per andare oltre le formule precedenti, e poter descrivere l'effetto di una forza F su una massa m, è necessario capire a quale caratteristica del moto sia legata la forza. Agli inizi la cosa non era chiara, e si discusse a lungo su varie possibilità: in particolare Galileo e Cartesio proponevano la «quantità di moto» mv, Leibniz la «forza viva» mv^2, e Newton ma. Paradossalmente, tutte e tre le proposte erano sensate, ma si riferivano ad aspetti diversi.

Oggi sappiamo che la definizione corretta della forza è quella proposta nel 1687 da Newton nei *Principia*, cioè $F = ma$. Chiarito questo, il resto segue automaticamente dalle tre formule precedenti, moltiplicandone entrambi i membri per la massa. Dalla prima si ottiene $Ft = mv$, che uguaglia l'impulso di una forza alla quantità di moto. E dalla terza si ottiene $Fs = mv^2/2$, che uguaglia il lavoro di una forza all'energia cinetica. In altre parole, Cartesio e Leibniz non avevano definito la forza, ma misurato il suo effetto nel tempo e nello spazio: cioè l'impulso fornito e il lavoro effettuato.

Data una forza F che agisce su un corpo di massa m, la formula dell'impulso permette di determinare da un lato la velocità raggiunta in un dato tempo, e dall'altro lato il tempo nel quale si raggiunge una data velocità. Mentre la formula del lavoro permette di determinare, da un lato, la velocità raggiunta in un dato spazio, e dall'altro, lo spazio nel quale si raggiunge una data velocità.

Come già per le formule di partenza, anche quelle di arrivo sono espressioni di due filosofie alternative, benché tecnicamente equivalenti. E a seconda che si privilegino i concetti di tempo, quantità di moto e impulso, oppure di spazio, energia cinetica e lavoro, si ottengono rispettivamente gli approcci alla meccanica di Galileo, Cartesio e Newton da un lato, e di Keplero, Leibniz e Huygens dall'altro.

Poiché le equazioni dell'impulso e del lavoro mostrano che sono le forze a generare sulle masse variazioni della quantità di moto e dell'energia cinetica, attraverso il loro effetto nel tempo e nello spazio, la quantità di moto e l'energia cinetica di un sistema chiuso (che non perde o acquista massa) e isolato (che non è soggetto a forze esterne) si conservano. Si ottengono così i due principi fondamentali di conservazione della meccanica, come semplice conseguenza di un paio di formulette. A dimostrazione appunto del potere della matematica intuito da Galileo.

Stefano Bianchetti/Corbis