

SETTE VOLTE SETTE

Piergiorgio Odifreddi

Le Scienze, Marzo 2007

Il problema 79 del papiro di Rhind, scritto dallo scriba Ahmes verso il 1650 prima dell'Era Volgare, domanda: "In una proprietà ci sono 7 case. Ogni casa ha 7 gatti. Ogni gatto acchiappa 7 topi. Ogni topo mangia 7 spighe. Ogni spiga dà 7 misure di grano. Quante cose ci sono in questa storia?". La soluzione richiede una certa sofisticazione matematica, perché si tratta di calcolare la somma dei primi cinque termini della progressione geometrica di ragione 7, e il papiro fornisce la soluzione corretta:

$$7 + 49 + 343 + 2401 + 16.807 = 19.607.$$

Il problema, riportato tale e quale nel 1202 da Fibonacci nel suo *Liber abaci*, è la prima testimonianza storica del processo di iterazione (in questo caso, del prodotto per 7) e della conseguente operazione dell'esponenziale (in questo caso, con base 7). Un po' più sofisticata è l'operazione del fattoriale, in cui il prodotto viene iterato con un fattore non costante, ma crescente ogni volta di uno. Questa volta la sua prima testimonianza storica è nelle *Leggi* di Platone (v, 737e-738a), dove viene di nuovo usato come base il numero 7.

Il problema in questione è la determinazione del numero di lotti di terreno e di proprietari ideale per la fondazione di una nuova città, e il criterio è che esso abbia "il maggior numero possibile di divisori, meglio se non consecutivi". La soluzione di Platone è appunto il fattoriale di 7, cioè 5.040. Essendo scomponibile come $24 \times 32 \times 5 \times 7$, i suoi divisori sono infatti

$$(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 - 1 = 60 - 1 = 59.$$

Tra l'altro, benché questo sia stato notato non più da Platone, ma da Henri Brocard nel 1876 e da Srinivasa Ramanujan nel 1913, il fattoriale di 7

ha anche l'interessante proprietà di essere quasi un quadrato, nel senso che lo è 5.041 (di 71). Si conoscono solo altri due fattoriali (24 e 120) con la stessa proprietà, e rimane un problema aperto se ce ne siano altri.

E sempre Platone, invece, a parlare in un oscuro passaggio della *Repubblica* (VIII, 546c) di “un numero geometrico che ha il potere di determinare la natura, buona o cattiva, della prole: se resta sconosciuto ai Custodi essi finiranno con l'unire in matrimonio sposi e spose male assortiti, col risultato di avere figli poco dotati e disgraziati”.

Questa volta si tratta di una metafora, che Platone deriva dal fatto che il quadrato di 7 è quasi uguale al doppio del quadrato di 5, ossia che $7/5$ è una buona approssimazione razionale della radice di 2 (o, se si preferisce, che 7 e 5 sono soluzioni dell'equazione di Pell $x^2 - 2y^2 = -1$). Il suo auspicio è che anche un'unione a prima vista irrazionale come il matrimonio possa quasi funzionare, se gli sposi sono ben assortiti come i numeri 7 e 5.

Naturalmente i due numeri 7 e 5 fanno subito venire in mente le sette note della scala musicale e i relativi accordi di quinta. In effetti, il numero irrazionale di volte in cui la quinta ($3/2$) sta nell'ottava (2) è bene approssimato dal rapporto $4/7$, nel senso che sette quinte sono quasi uguali a quattro ottave (la loro differenza è all'incirca un semitono), e questo è il motivo per cui la scala comune ha sette note. Ancora migliore è l'approssimazione $7/12$, perché dodici quinte sono ancora più vicine a sette ottave (la loro differenza è il cosiddetto comma pitagorico, all'incirca un ottavo di tono), e questo è il motivo per cui la scala cromatica ha dodici note.

Nella teoria cosmologica esposta da Platone nel *Timeo* le sette note corrispondono ai sette “pianeti” noti nell'antichità, e cioè (nell'ordine apparente del sistema tolemaico) Luna, Mercurio, Venere, Sole, Marte, Giove e Saturno, da cui derivano (nell'ordine ottenuto procedendo “per quinte”) i nomi dei corrispondenti sette giorni della settimana. Nella teoria dei colori esposta da Newton nell'*Ottica* le sette note (della scala di la minore) corrispondono invece ai sette colori visibili, grazie al fatto che le lunghezze d'onda dell'infrarosso e dell'ultravioletto (600 e 300 nanometri) stanno nello stesso rapporto di due note distanti un'ottava (2).

Nella teoria dell'ereditarietà, sette sono i caratteri dei piselli individuati da Mendel nel 1856 per determinare le sue tre leggi. Nella teoria della simmetria, sette i tipi di gruppi cristallografici unidimensionali classificati nel 1891 da Fedorov, già usati nei fregi lineari dagli artisti di ogni epoca, dagli Egizi agli Arabi. Insomma, non si può certo dire che 7 sia un numero settario!