di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Prendiamo il toro per le corna

Viaggio geometrico in una superficie che ha tanti esempi in oggetti di uso quotidiano

Già ai tempi di Platone, un pitagorico di Taranto di nome Archita aveva scoperto una superficie interessante, a cui i greci diedero il nome di *speira*, «spira», e che noi invece chiamiamo toro, dal latino *torus*, «cordone». Si tratta di una specie di ciambella (riuscita, cioè col buco), che si ottiene dalla rivoluzione di un cerchio attorno a un asse che sta sul suo piano, e che può essere esterno, tangente o interno al cerchio stesso. A seconda dei tre casi, il toro è aperto ad anello, appuntito a corno o autointersecantesi a fuso.

E già ai tempi di Apollonio un matematico menzionato da Proclo e di nome Perseo aveva studiato le sezioni spiriche o toriche, ottenute intersecando un toro con un piano in maniera analoga alle sezioni coniche, che si ottengono invece intersecando un cono. Si generano così varie curve interessanti e complicate (di quarto grado, diremmo oggi, mentre le sezioni coniche sono solo di secondo grado): esse dovettero soddisfare Perseo, visto che Proclo afferma che dopo la loro scoperta egli scrisse un epigramma in cui «rese grazie agli dèi». Le più famose di queste curve sono l'ippopede, a forma di piede di cavallo, e gli ovali di Cassini, tra i quali la lemniscata di Bernoulli.

Eyecandy Images/Corbis

Il toro si può semplicemente descrivere come una superficie chiusa e con un buco: in altre parole, il buco non sta sulla superficie, ma nello spazio in cui essa si trova. Se ne trovano esempi più o meno regolari, ma tutti topologicamente equivalenti, in manufatti quali le vere matrimoniali, le camere d'aria dei pneumatici, i salvagenti, le guarnizioni ad anello, le mele senza torsolo, i *bagel*, i *doughnut* e gli *onion ring*.

Ma anche in fenomeni naturali, quali i vortici di sangue prodotti nel ventricolo sinistro del cuore dal flusso che entra attraverso la valvola mitrale. O di aria, generati dalle pale di un elicottero. O di acqua, sollevati dai *microburst* di pioggia e vento che colpiscono il suolo in verticale. O di plasma, causati dal campo magnetico di Giove attorno all'orbita del proprio satellite Io, o da quello del Sole attorno al proprio equatore.

Un modo semplice e istruttivo di ottenere un toro consiste nel prendere un rettangolino di carta, incollare due lati opposti in modo da ottenere un cilindro, e poi incollare i rimanenti due lati opposti in modo da ottenere un toro. Volendo, si può considerare il rettangolino stesso come una mappa del toro, identificando appunto le coppie di lati opposti: come nella grafica computerizzata, un punto che uscisse da un lato dello schermo rientrerebbe da quello opposto nella stessa posizione e proseguendo nella stessa direzione.

In un lavoro del 1890, Percy Heawood dimostrò che per il toro vale un «teorema dei sette colori». In particolare, sette colori sono necessari perché, diversamente dal piano e dalla sfera (dove di colori ne bastano quattro), su un toro è possibile che sette paesi confinino ciascuno con gli altri sei. Un esempio si ricava facilmente arrotolando una piastrellazione esagonale del piano su se stessa, in modo da far ricoprire il toro da sette piastrelle che confinano ciascuna con le sei che la circondano.

Ancora diversamente dal piano e dalla sfera, su un toro non è vero che una curva chiusa che non si autointerseca divide la superficie in due parti, una esterna e l'altra interna: un'osservazione apparentemente banale, ma niente affatto ovvia da dimostrare, enunciata per la prima volta nel 1887 da Camille Jordan nel suo *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, e nota appunto come «teorema di Jordan».

Sul toro, invece, ci sono due tipi di curve chiuse che non lo dividono affatto in due parti, ma in una sola: una gira attorno al buco, e l'altra si avvolge attorno al corpo del toro. Se le si fanno partire entrambe da uno stesso punto, si ha un grafo con un vertice, due lati e una sola faccia. E si scopre che se si considera la caratteristica di Eulero, che si calcola sommando il numero dei vertici e delle facce e sottraendo quello dei lati, si ottiene non più il valore 2, come per il piano e per la sfera, bensì 0.

La caratteristica di Eulero permette dunque di distinguere matematicamente fra loro una sfera da un toro. Cioè una palla da un salvagente, o una pagnotta da una ciambella. Cosa apparentemente banale, ma che certo sarebbe servita a Eulero: il quale, essendo cieco, non poteva accorgersi di certe cose a occhio. Ma, soprattutto, un risultato che diede ai matematici di fine Ottocento l'idea per classificare le superfici a due dimensioni in base alla loro caratteristica.