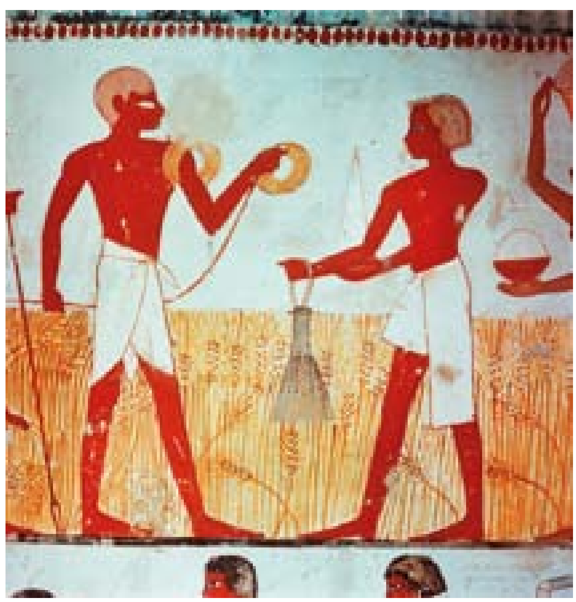
di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Gli strumenti del geometra

Per risolvere problemi di geometria si usano funi, righe, compassi ed equazioni

Sulla riva occidentale del Nilo, a Luxor, tra le varie tombe dei funzionari c'è quella di Menna, «scriba dei campi del Signore delle Due Terre», che risale circa al 1400 a.C. Nelle sue decorazioni si osservano in azione i primi geometri della storia, in entrambi i sensi della parola: l'agrimensore e il matematico. In greco geometria significava infatti «agrimensura», e in egiziano i praticanti di quest'arte venivano chiamati *harpedonaptai*, «tenditori di funi».

La corda tesa era uno strumento molto versatile, che poteva allo stesso tempo servire da riga e compasso. Con essa si poteva dunque effettuare tutta la geometria descritta da Euclide nei suoi *Elementi*, che per motivi estetici e filosofici si limitavano appunto alle costruzioni effettuabili con riga e compasso.



Origini. Scena di agricoltura nella Tomba di Menna, in Egitto, si noti la fune dell'uomo a sinistra usata per l'agrimensura.

Ma bastava essere «(in)tenditori di funi» per andare oltre Euclide, e risolvere per esempio il famoso problema della trisezione dell'angolo, che oggi sappiamo insolubile usando solo gli strumenti classici. Dato un angolo, infatti, basta costruire con una fune un arco di circonferenza corrispondente, tenderlo, trisecare il segmento ottenuto (cosa che si può fare con riga e compasso), e ridisporlo lungo l'arco di circonferenza.

Poiché la riga euclidea non è graduata e il compasso euclideo collassa non appena lo si alza dal foglio, i due strumenti classici furono potenziati nella riga graduata e nel compasso non collassabile, che permettono di riportare segmenti di una data lunghezza in una data direzione. E Archimede scoprì che anche con questi strumenti si può facilmente effettuare la trisezione dell'angolo.

Poiché il compasso permette l'uso dei cerchi, un altro modo di potenziare la geometria euclidea fu di permettere anche l'uso delle altre sezioni coniche: cioè ellisse, parabola e iperbole. Queste infatti non si possono costruire con riga e compasso, ma ammettono comunque costruzioni naturali: per esempio quella dell'ellisse mediante una corda tesa ancorata ai due fuochi. E Apollonio mostrò come si possano usare le sezioni coniche per risolvere problemi insolubili classicamente, come la solita trisezione dell'angolo.

Molte altre curve meno naturali, come la cissoide di Diocle o la concoide di Nicomede, furono usate in maniera analoga nell'antichità per risolvere problemi insolubili con riga e compasso. Ma il passo decisivo in questa direzione fu effettuato da Cartesio in *La Geometria*, del 1637, che segna la data di nascita della geometria algebrica, cioè dell'uso dell'algebra per la soluzione di problemi geometrici.

Il metodo di Cartesio equivale a permettere in geometria l'uso di curve algebriche di grado qualunque, che possono essere classificate in base al loro grado: per esempio la retta è di primo grado, le sezioni coniche di secondo, la cissoide di terzo e la concoide di quarto. E Newton mostrò che l'uso della sola concoide permette di risolvere tutti i problemi che si possono tradurre in equazioni fino al quarto grado: in particolare, tutti quelli che erano risolubili mediante riga graduata e compasso collassabile o mediante sezioni coniche.

Ma anche la geometria cartesiana aveva serie limitazioni, perché la rappresentazione algebrica di una curva non rispecchia la sua complessità geometrica. Per esempio l'equazione di una parabola ($y = ax^2$) è più semplice di quella di un cerchio ($x^2 + y^2 = r^2$), ma un cerchio è più facile da costruire di una parabola. Oppure, curve come la spirale di Archimede o la cicloide di Galileo sono facili da generare meccanicamente, ma impossibili da esprimere algebricamente.

Newton propose dunque di compiere l'ultimo passo e di arrivare alla geometria analitica, che permette l'uso di curve analitiche qualunque, e la giustificò come la naturale estensione della geometria classica mediante processi al limite. Per esempio, poiché 1/3 è uguale alla somma della serie infinita 1/2 meno 1/4 più 1/8 meno 1/16, e così via, la trisezione dell'angolo diventa semplicemente il limite di una serie infinita di successive bisezioni.

L'uso di curve analitiche come la spirale di Archimede o la cicloide di Galileo permette di risolvere problemi insolubili mediante metodi algebrici, come la famosa quadratura del cerchio. Un problema che, per inciso, si può facilmente risolvere anche con i metodi egizi, tendendo la circonferenza unitaria e costruendo un quadrato di lato pari alla radice quadrata della sua metà (cosa che si può fare con riga e compasso). A conferma dell'antica sapienza del paese delle Due Terre, da cui eravamo partiti.

Werner Forman/Werner Forman/Corbis