di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Un teorema veramente spaziale

Grazie a un teorema proposto nel XVII secolo nacque la geometria proiettiva

Un paio di secoli di prospettiva e di anamorfosi, per non parlare di un millennio e mezzo di cartografia, crearono nel Seicento le condizioni perché si potesse gettare uno sguardo nuovo sulla geometria. Il primo a farlo fu Girard Desargues nel 1639, nel testo *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du Cone avec un Plan* (cioè *Schizzo schematico di ciò che succede quando si seziona un cono con un piano*). Naturalmente, che cosa succede lo sapevano già i Greci, e lo sappiamo anche noi: si formano le sezioni coniche. Ma Desargues propose di adottare il punto di vista della prospettiva, e di guardare queste sezioni dal vertice del cono. In questo caso la differenza tra ellissi, parabole e iperbole scompare, e di sezioni coniche ne rimane una sola: il cerchio.

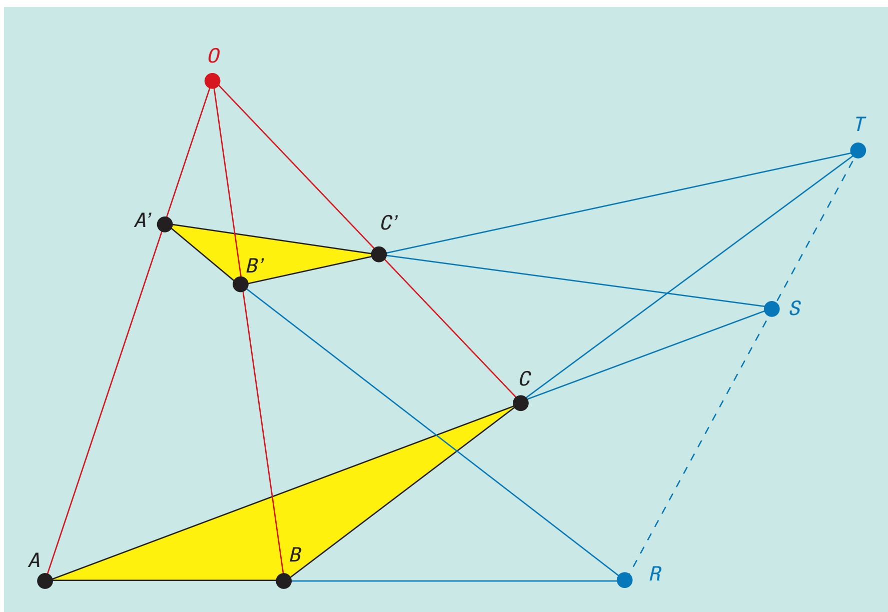
Lo stesso punto di vista permette anche di far scomparire un'altra differenza: quella tra rette incidenti, che si incontrano in un punto, e rette parallele, che non si incontrano mai. Poiché nella prospettiva queste ultime si dirigono verso un comune punto di fuga, Desargues propose di aggiungere a ciascuna retta euclidea un punto all'infinito, che coincide con il punto all'infinito di tutte le rette a essa parallele.

L'aggiunta rende simmetrico il rapporto fra rette e punti, che nella geometria euclidea non lo era. Dati due punti, infatti, era sempre vero che individuavano una e una sola retta. Ma date due rette non era sempre vero che individuavano uno e un solo punto: lo era solo quando le rette non erano parallele. Con l'aggiunta dei punti all'infinito, Desargues poté invece basare la geometria proiettiva su due assiomi completamente simmetrici: due punti individuano una e una sola retta, e due rette individuano uno e un solo punto. La nuova geometria proiettiva non si limitò a interpretare in maniera innovativa la geometria classica, e in particolare le sezioni coniche. Produsse anche nuovi risultati originali e tipicamente proiettivi, di cui il primo dovuto a Desargues stesso.

Oggi lo si chiama giustamente teorema di Desargues, e afferma che se due triangoli sono in prospettiva centrale da un punto, sono anche in prospettiva assiale da una retta, e viceversa (*nel disegno*). Detto più esplicitamente: se le tre rette che uniscono i vertici corrispondenti di due triangoli si incontrano in uno stesso punto, allora i tre punti che si ottengono intersecando i lati corrispondenti stanno su una stessa retta.

Visto come relazione tra due triangoli nello spazio, il teorema è abbastanza intuitivo. In una direzione, basta osservare che se i due triangoli sono in prospettiva da un punto allora sono due sezioni planari di una piramide triangolare, e i due piani secanti si incontrano in una retta. Viceversa, se i due triangoli sono in prospettiva da una retta allora i tre piani che contengono i lati corrispondenti formano le facce di una piramide triangolare, i cui tre lati si incontrano in un punto.

Visto invece come relazione tra due triangoli nel piano, il teorema è molto più sottile. Desargues capì che in questo caso è necessaria una dimostrazione separata e diversa, che diede nel suo lavoro del 1639. Una possibile dimostrazione consiste comunque nel prendere un punto fuori dal piano, «spazializzare» la configurazione sul piano, usare la versione spaziale del teorema e riproiettare di nuovo il tutto sul piano.



Solo nel 1899 si capì che cosa c'era dietro questo doppio aspetto, spaziale e planare, del teorema di Desargues. Nei *Fondamenti della geometria*, David Hilbert dimostrò infatti che il teorema di Desargues è la proprietà caratteristica delle geometrie piane che si possono immergere in geometrie spaziali, appunto.

In altre parole, esseri bidimensionali costretti a vivere sul piano, e impossibilitati a sperimentare percettivamente lo spazio, possono comunque dedurne l'esistenza, o almeno la possibilità, dal teorema di Desargues. Come la Grazia del Catechismo, esso è dunque un segno visibile, o tangibile, di qualcosa di invisibile, o intangibile.