



# Tu scendi dalle stelle

Qualche esempio di stella, da Pitagora all'arte moderna, passando per Keplero

**I**n tempi natalizi si sente spesso parlare di stelle mitologiche. Gli astronomi possono riportare il discorso nell'ambito della scienza, parlando di reali stelle fisiche. Ma i matematici, che non vogliono essere da meno, hanno anche loro varie stelle da esibire: si tratta dei cosiddetti poligoni e solidi stellati, ottenuti aggiungendo triangoli sui lati dei poligoni, o piramidi sulle facce dei solidi.

Un bell'esempio è quella che nel 1619 Keplero chiamò stella ottagonale, nel suo libro *Harmonices Mundi*, ma che era già stata disegnata da Leonardo nel 1509 in una delle illustrazioni per il *De divina proportione* di Luca Pacioli. La si può pensare come un ottaedro stellato, appunto, ottenuto aggiungendo un tetraedro su tutte le facce di un ottaedro. O, equivalentemente, estendendo un ottaedro mediante un prolungamento di tutte le sue facce. Ma la si ottiene anche intersecando due tetraedri duali contenuti in uno stesso cubo, e il risultato è un solido con volume pari a metà di quello del cubo.

Molto più spettacolare è però la stella pitagorica, determinata dalle diagonali di un pentagono regolare. Il nome deriva dal fatto che i Pitagorici la usavano come simbolo della loro confraternita, ma in seguito la si ritrova nel *Faust* di Goethe, dove si scopre che nei cosiddetti secoli bui veniva usata per impaurire il diavolo, perché ha tante punte quante le lettere del nome «Jesus». Nel Novecento è diventata la famosa «stella rossa sulla Cina», a cui Edgar Snow ha dedicato un omonimo libro, e se la sono annessi come simbolo l'Armata Rossa, i Viet Cong, i Tupamaros e infine le Brigate Rosse.

Ma è stata usata anche nell'arte. A volte in maniera esplicita, come in *The Demuth American Dream No. 5* di Robert Indiana, del 1963. E altre in maniera implicita, come nella *Leda Atomica* di Salvador Dalí, del 1949, in cui la figura è inscritta in una stella pitagorica per farle assumere automaticamente le proporzioni auree. La proprietà essenziale della stella, infatti, è che il rapporto fra i suoi lati e quelli del pentagono in cui è inscritta è pari alla sezione aurea. La stella pitagorica si può considerare come un pentagono stellato, ottenuto aggiungendo un triangolo aureo isoscele (avente i

lati in proporzione aurea con la base) su tutti i lati di un pentagono. Il rapporto fra i lati dei due pentagoni, esterno e interno, che permettono di definire la stella pitagorica è pari al quadrato della sezione aurea. E poiché il procedimento si può estendere all'infinito in entrambe le direzioni si ottiene una dimostrazione geometrica dell'irrazionalità della sezione aurea, che costituisce probabilmente il primo esempio storico di un irrazionale.

In realtà di triangoli aurei la stella pitagorica ne contiene 20. Cinque piccoli, già citati, aventi per base i lati del pentagono interno e costituenti le punte della stella. Cinque grandi, aventi per base i lati del pentagono esterno ed estendenti i precedenti. E dieci medi, aventi per base i lati obliqui delle punte, e orientati cinque in direzione oraria e cinque in direzione antioraria.

Un altro modo di vedere la stella pitagorica è pensarla come un pentagono regolare, a cui sono stati sottratti cinque gnomoni aurei isosceli (lo gnomone aureo è un triangolo isoscele in cui il rapporto fra la base e i lati è aureo), duali dei triangoli aurei. In realtà, di gnomoni aurei la stella pitagorica ne contiene quindici. Cinque piccoli, già citati, aventi per base i lati del pentagono esterno. E dieci grandi, aventi per base i lati della stella stessa, e orientati cinque verso l'esterno e cinque verso l'interno.

Le coppie di gnomoni aurei grandi, aventi per base comune un lato della stella, costituiscono cinque rombi aurei larghi, in cui la diagonale lunga è in proporzione aurea con i lati. I rombi aurei lunghi sono invece definiti, dualmente, dalla proprietà di avere i lati in proporzione aurea con la diagonale corta. E i due tipi di rombi costituiscono le due piastrelle di Penrose, che con opportuni incastrati permettono di ricoprire completamente il piano, ma solo in maniera non periodica.

Chiudendo nello spazio una stella pitagorica si ottiene una piramide aurea avente base pentagonale e facce a triangolo aureo. E aggiungendo 12 di queste piramidi sulle facce di un dodecaedro si ottiene un piccolo dodecaedro stellato, spesso usato in Oriente come lampada, che costituisce un'illuminazione ideale per il presepe delle stelle matematiche.



**Arte moderna.** *The Demuth American Dream No. 5*, di Robert Indiana, esposta al Whitney Museum di New York.