di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

La chiave dello scrigno lucente

Come la terza legge di Keplero aiutò a seppellire una polemica secolare

Nel 1619 Keplero pubblicò uno strano libro, intitolato *Harmonices Mundi*, che portava a compimento il programma dei Pitagorici. Questi ultimi avevano scoperto le prime leggi matematiche della musica: in particolare, che i rapporti numerici corrispondenti ai rapporti armonici dell'unisono (lo stesso *do*), dell'ottava (due *do* consecutivi) e della quinta (il *sol* successivo a un *do*) sono, rispettivamente, 1, 2 e 3/2. E il motivo è che per far risuonare una corda di violino un'ottava sopra bisogna dividerla a metà, mentre per farla risuonare una quinta sopra bisogna dividerla a due terzi.

I Pitagorici avevano applicato le proprie teorie musicali all'astronomia, e sulla loro scia Keplero considerava il sistema solare come una lira di Apollo cosmica, in cui i pianeti risuonavano con suoni emessi da corde ideali che li collegavano al Sole. Analizzando i dati astronomici in suo possesso, Keplero si accorse che i rapporti fra i tempi di rivoluzione dei pianeti erano legati ai raggi medi delle loro orbite da un rapporto numerico più che lineare, ma meno che quadratico: cioè, l'esponente del raggio era maggiore di 1 e minore di 2. In termini musicali, questo corrispondeva a un rapporto compreso fra l'unisono e l'ottava, ed egli suppose che fosse una quinta: cioè, che l'esponente del raggio dovesse essere 3/2.

Ricercatore di armonia. Ritratto dell'astronomo e matematico tedesco Johannes Kepler.

Tarker/Corbis

Enunciò dunque quella che oggi chiamiamo la terza legge di Keplero: i quadrati dei tempi di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei raggi medi delle loro orbite ($t^2 = kr^3$). Nel 1666 il giovane Newton scoprì la formula per l'accelerazione nel moto circolare uniforme ($a = v^2/r$), e supponendo che le orbite planetarie fossero circolari derivò banalmente dalla terza legge di Keplero che l'accelerazione dei pianeti è inversamente proporzionale al quadrato del raggio medio delle loro orbite ($a = 4\pi^2/kr^2$).

Poco dopo anche Huygens ritrovò la formula per l'accelerazione, e la pubblicò nel 1673 nella descrizione dell'orologio a pendolo. E da essa almeno altri tre scienziati (Edmond Halley, Robert Hooke e Christopher Wren) derivarono dalla terza legge di Keplero la legge dell'inverso del quadrato della distanza per orbite circolari. Essi si posero il problema se la stessa legge valesse anche per le orbite ellittiche, e non riuscendo a risolverlo lo girarono nel 1684 a Newton, che nel suo capolavoro del 1687, i *Principi matematici della filosofia naturale*, sviscerò matematicamente l'argomento.

Newton dimostrò che per le orbite circolari la terza legge di Keplero è equivalente alla legge dell'inverso del quadrato della distanza. E che per orbite qualunque la legge dell'inverso del quadrato della distanza è caratteristica di tutte e sole le orbite descrivibili con un'equazione quadratica: cioè, oltre ai cerchi, anche ellissi, parabole e iperboli. Inoltre, la terza legge di Keplero implica che la costante di proporzionalità sia la stessa per tutti i pianeti: cioè che ci si trovi di fronte agli effetti di un'unica forza di attrazione solare.

Per poter però dedurre una legge di gravitazione universale, Newton dovette lavorare ancora. Notò che la terza legge di Keplero vale non solo per i pianeti attorno al Sole, ma anche per i satelliti di Giove e quelli di Saturno: dunque, anche questi pianeti generano forze di attrazione analoghe a quella solare. Quanto alla Terra, che ha un unico satellite, Newton paragonò la gravità responsabile della caduta delle mele con quella responsabile della tenuta in orbita della Luna, e trovò che erano legate dalla legge dell'inverso del quadrato della distanza: dunque si poteva immaginare che si trattasse di un'unica forza, anch'essa analoga alle precedenti.

A questo punto Newton poté postulare l'esistenza di una forza di attrazione gravitazionale universale, inversamente proporzionale al quadrato della distanza. E direttamente proporzionale alle masse, perché nel vuoto tutti i corpi cadono con la stessa velocità. Dall'espressione della forza gravitazionale generata da un corpo (GM/r^2), Newton derivò il valore della costante di proporzionalità della terza legge di Keplero relativa a quel corpo ($k = 4\pi^2/GM$).

Misurando empiricamente le costanti per il Sole rispetto ai pianeti, e per la Terra, Giove e Saturno rispetto ai loro satelliti, Newton poté calcolarne le masse. E con la terza legge di Keplero dimostrò che se fosse stato il Sole a girare attorno alla Terra avrebbe dovuto farlo in 600 anni, invece che in uno, seppellendo per sempre una secolare polemica con una semplice formuletta.