di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Pitagora in 3D

Il teorema di Pitagora vale anche per forme diverse dal quadrato e in tre dimensioni

Ci sono cose, al mondo, sulle quali pensiamo di sapere tutto da sempre, fino a quando non ci mettiamo a esaminarle, e scopriamo che dietro di esse si nascondono sorprese inaspettate. Prendiamo per esempio il famoso teorema di Pitagora: in un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa. Ce lo insegnano fin dalle elementari, e molti tendono a considerarlo una verità definitiva e immutabile. Eppure da un lato si tratta di un'affermazione molto particolare, valida solo sotto certe assunzioni. E, dall'altro, si tratta di un esempio di affermazioni molto più generali, che si riducono a esso in certe situazioni.

Cominciamo dal particolare: il fatto, cioè, che il teorema di Pitagora vale solo nella geometria euclidea. Anzi, è caratteristico di questa geometria, nel senso che è equivalente all'assioma delle parallele, che definisce la geometria euclidea sulla base degli assiomi della cosiddetta geometria assoluta, i cui teoremi non dipendono appunto da assunzioni sulle parallele. In particolare, nella geometria iperbolica il teorema di Pitagora fallisce miseramente perché non esistono rettangoli, e dunque neppure quadrati. E nella geometria sferica fallisce perché esistono triangoli rettangoli equilateri: per esempio gli ottanti della sfera.

Rimaniamo dunque nell'ambito della geometria euclidea, nel qual caso il teorema di Pitagora non è che la punta di un iceberg di risultati sommersi. Il primo, e forse il più sorprendente, è che i quadrati non hanno nessun ruolo particolare, nel suo enunciato. Qualunque altro poligono, anche non regolare, andrebbe bene: anzi, addirittura qualunque figura, anche non rettilinea. Perché in un triangolo rettangolo la somma di figure simili costruite sui cateti è uguale alla figura simile costruita sull'ipotenusa (*illustrazione*).

A enunciare il risultato generale per i poligoni fu Euclide, nella Proposizione VI.13 degli *Elementi*, anche se poi ne dimostrò solo un caso particolare. E il primo a estendere il risultato a figure curvilinee fu Ippocrate, che usò il fatto che la somma dei semicerchi costruiti sui cateti è uguale al semicerchio costruito sull'ipotenusa per quadrare una particolare lunula. Il motivo per cui il teorema è in genere enunciato per i quadrati è che l'area di una figura qualunque con un lato rettilineo è proporzionale al quadrato di quel lato: dunque la forma generale si deduce da quella particolare.

Un'estensione diversa si ottiene passando dai triangoli rettangoli a triangoli qualunque. In tal caso il teorema fallisce, ovviamente, ma si può generalizzare alla cosiddetta «legge dei coseni»: in un triangolo qualunque la somma dei quadrati di due lati è uguale al quadrato del terzo lato, più due volte il prodotto dei due lati per il coseno dell'angolo compreso. Nel caso che il triangolo sia rettangolo, l'angolo compreso fra i due cateti è di 90 gradi, il suo coseno è uguale a 0 e il termine aggiuntivo scompare.

In un'ulteriore direzione si può passare da due a tre dimensioni. Un modo banale per estendere il teorema è riformularlo dicendo che in un rettangolo il quadrato della diagonale è uguale alla somma dei quadrati dei due lati, e notare che in un parallelepipedo retto il quadrato della diagonale è uguale alla somma dei quadrati dei tre lati. La cosa discende direttamente da due applicazioni consecutive del teorema originario: la prima per trovare il quadrato della diagonale di una faccia, e la seconda per trovare da essa e dal terzo lato il quadrato della diagonale del solido. E il tutto si può facilmente estendere a un numero qualunque di dimensioni.

Meno banalmente si possono considerare i tetraedri retti (in cui tre facce si incontrano in un vertice come in un cubo) come gli analoghi tridimensionali dei triangoli rettangoli, e le loro facce come gli analoghi tridimensionali dei lati. Sorprendentemente, in un tetraedro retto la somma dei quadrati delle facce adiacenti al vertice retto è uguale al quadrato della faccia opposta. Ancora una volta la dimostrazione si basa sul teorema di Pitagora originario, completando il tetraedro in un parallelogramma retto e calcolando i suoi lati come diagonali delle facce.

Benché già anticipata da Cartesio, questa versione viene di solito chiamata teorema di De Gua, in onore del matematico Jean Paul de Gua de Malves, che la presentò nel 1783 all'Accademia delle scienze di Parigi, e che passò alla storia come l'iniziatore della grande *Enciclopedia*, poi diretta da quel Diderot che lui stesso aveva cooptato nel progetto.