



# Formule ecumeniche

L'equazione dell'entropia di un buco nero e le costanti fisiche fondamentali

**L**a formula più famosa della matematica è dovuta a Eulero, e lega insieme le cinque costanti fondamentali dell'aritmetica e dell'analisi, reale e complessa. Cioè i numeri interi 0 e 1, i numeri reali  $e$  e  $\pi$ , e l'unità immaginaria  $i$ , ossia la radice quadrata di  $-1$ . La formula stabilisce che  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , ed è semplicemente un caso particolare di una formula molto più generale, che lega insieme tre funzioni fondamentali dell'analisi: l'esponenziale complesso, il seno e il coseno.

In fisica, l'analogo della formula di Eulero sarebbe una formula che lega insieme le costanti fondamentali delle varie teorie standard: cioè teoria della gravitazione, termodinamica, relatività e meccanica quantistica. Sorprendentemente, una formula del genere esiste per davvero, ed è quella che fornisce l'entropia di un buco nero.

L'entropia misura il disordine dello stato di un sistema: di qui l'uso della lettera  $S$ , iniziale di «stato», per indicarla. Che anche un buco nero abbia entropia, e che essa sia proporzionale all'area del suo orizzonte degli eventi, è stato proposto nel 1972 dal fisico Jacob Bekenstein: un'intuizione interessante, visto che nella termodinamica classica l'entropia è proporzionale non alla superficie, ma al volume delle regioni considerate.

Quando si esprime un'entropia, è naturale farlo in termini della costante di Boltzmann  $k$ . Questa appare nella famosa formula  $S = k \log W$ , che è incisa sulla sua tomba a Vienna. Ma, in realtà, sia la formula sia la relativa costante sono state introdotte da Max Planck, nella sua altrettanto famosa memoria del 14 dicembre 1900 sull'irraggiamento del corpo nero, la stessa nella quale è stata introdotta anche la costante di Planck  $h$  per l'energia.

Il modo più semplice per capire il ruolo che la costante di Boltzmann riveste nella termodinamica è prendere in considerazione la legge dei gas perfetti. Questa legge afferma che, in un gas, «il prodotto della pressione per il volume è proporzionale alla temperatura». E la costante di proporzionalità è data dal prodotto della costante  $k$  di Boltzmann per il numero  $N$  di molecole del gas. In formula,  $PV = NkT$ .

La costante di Boltzmann rende conto della dimensionalità dell'entropia, che è un'energia divisa per una temperatura. Dunque, tutto il resto di una formula di entropia deve essere un numero puro. In particolare, se l'entropia deve essere proporzionale alla superficie di un buco nero, bisognerà dividere quest'ultima per un'area unitaria di riferimento. E in meccanica quantistica è naturale usare l'area di Planck, corrispondente a un quadrato di lato pari alla lunghezza di Planck  $l$ .

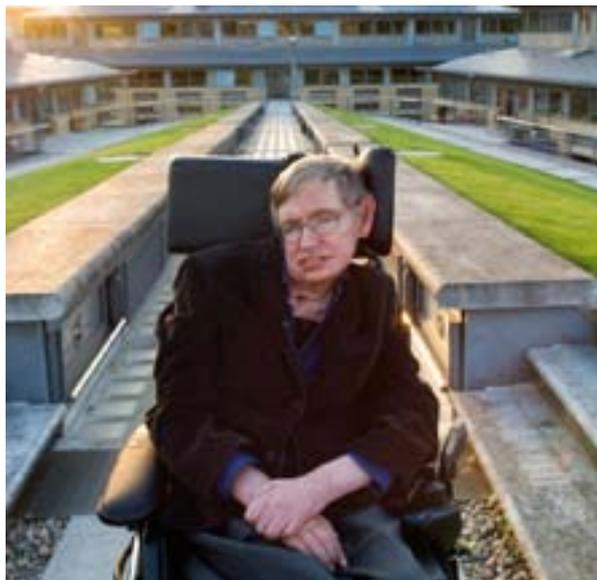
Quest'ultima indica la dimensione in cui la struttura dello spazio-tempo inizia a risentire degli effetti quantistici e ad assumere una natura «schiumosa». Non è sorprendente che la sua definizione faccia intervenire costanti che provengono sia dalla relatività generale sia dalla meccanica quantistica: cioè velocità della luce  $c$ , costante gravitazionale  $G$  e costante ridotta di Planck  $\hbar$ , che è pari ad  $h/2\pi$ . Precisamente, la definizione di  $l$  è la radice quadrata di  $G\hbar/2\pi c^3$ .

In sostanza, la proposta di Bekenstein si riduceva alla congettura che l'entropia di un buco nero avente un orizzonte degli eventi di area  $A$  fosse proporzionale a  $kA/l^2$ . Nel 1974 Stephen Hawking ha dimostrato che la congettura è corretta, e che la costante di proporzionalità è semplicemente  $1/4$ . La formula completa è allora  $S_{BH} = kA/4l^2$ , dove  $BH$  sta sia per Black Hole sia per Bekenstein-Hawking.

La formula dell'entropia di un buco nero contiene dunque in sé le costanti fondamentali della termodinamica, della relatività

speciale e generale e della meccanica quantistica. E anche, per buona misura, il pi greco! Esplicitamente, l'entropia di un buco nero il cui orizzonte degli eventi ha area  $A$ , è pari ad  $Ak\pi c^3/2Gh$ .

Più di così sarebbe difficile fare. A meno di riuscire a infilare in qualche formula simile anche l'unità immaginaria  $i$ . Questa unità interviene in effetti, insieme a  $\hbar$ , nell'equazione d'onda di Schrödinger. In quella relativistica di Dirac compare anche la velocità della luce  $c$ . E non è difficile immaginare che, nelle future equazioni della gravitazione quantistica, interverrà anche la  $G$ . Non ci rimane dunque che attendere lo sviluppo di queste equazioni, accontentandoci per ora dell'ecumenica formula di Bekenstein-Hawking.



**Il signore di buchi neri.** Il fisico Stephen Hawking fotografato al Center for Mathematical Science dell'Università di Cambridge.