

di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)



Disorientamento totale

Secondo appuntamento con il bizzarro mondo della topologia: la bottiglia di Klein

Lo scorso mese abbiamo narrato l'inizio della storia del disorientamento topologico, notando che se si incollano due lati opposti di un rettangolino di carta si ottiene un cilindro. Ma se prima di incollarli si fa fare al rettangolino un mezzo giro, si ottiene un nastro di Möbius. Ora vogliamo completare l'opera, incollando anche i due bordi rimasti. Nel primo caso si ottiene una ciambella, che i matematici chiamano toro. E nel secondo?

La cosa non è semplice da fare, nello spazio tridimensionale, ed è più semplice immaginare di incollare i bordi di un cilindro, dopo aver fatto loro fare un mezzo giro. Ma non basta far fare il mezzo giro al cilindro stesso, perché in questo caso non si ottiene niente di diverso da un toro, benché a spirale. Per far fare veramente un mezzo giro al bordo, bisogna incollarlo all'altro estremo dopo averlo fatto penetrare attraverso la superficie. Si ottiene così la bottiglia di Klein, scoperta nel 1882 da Felix Klein.

In realtà il nome è un fraintendimento, perché il tedesco *Kleinsche fläche*, «superficie di Klein», è stato confuso con *Kleinsche flasche*, «bottiglia di Klein». Il termine è rimasto, comunque, perché quando si cerca di raffigurare la superficie nello spazio tridimensionale si ottiene effettivamente qualcosa che somiglia a una bottiglia. Ma la somiglianza è puramente superficiale, appunto, perché come il nastro di Möbius non ha né un sopra né un sotto, così la bottiglia di Klein non ha né un fuori né un dentro: in particolare, non può contenere niente di ciò che vi si versa.

La caratteristica mancanza di separazione fra «dentro» e «fuori» della bottiglia di Klein è stata metaforicamente illustrata da Vladimir Nabokov nel romanzo *Il dono*, del 1937. Il protagonista dentro il libro è uno scrittore che descrive come ha iniziato a scrivere la sua prima opera, e alla fine si scopre che si tratta dell'autore del libro stesso. Il procedimento è poi stato portato alle estreme conseguenze nel 1979 da Italo Calvino, in *Se una notte d'inverno un viaggiatore*.

Passando dalle metafore alla realtà, la più singolare bottiglia di

Klein che esista è sicuramente una casa sulla penisola di Morlington, vicino a Melbourne, progettata nel 2008 dagli architetti dello studio McBride Charles Ryan. L'edificio si sviluppa attorno a un cortile, avvolto da una scala rossa a spirale che si autointerseca e collega tutte le stanze della casa, che si possono considerare tutte sia interne che esterne.

Naturalmente, niente obbliga a chiudere un nastro di Möbius alla maniera di un cilindro. Anzi, la simmetria richiederebbe di chiuderlo a nastro di Möbius, appunto: cioè dando un mezzo giro anche ai due lati liberi del rettangolo che lo definisce. Questa volta si ottiene il piano proiettivo, il cui nome lascia intuire che appare nella matematica anche sotto altre forme.

Come già per il nastro di Möbius, anche per il piano proiettivo

si ottengono due modelli nello spazio tridimensionale, a seconda che il secondo mezzo giro sia dato nella stessa direzione del primo o in quella contraria. Naturalmente, come già per la bottiglia di Klein, anche i modelli tridimensionali del piano proiettivo sono costretti ad autointersecarsi e a essere tutti scorretti, in qualche modo.

In *Sylvia and Bruno concluded*, secondo volume del seguito della più famosa saga di Alice, Lewis Carroll indica come costruirne uno. Si prendono tre fazzoletti quadrati. Se ne cuciono due lungo un lato. Si cuciono i lati

opposti con un mezzo giro. E infine si cuce il terzo fazzoletto lungo il bordo del nastro di Möbius così ottenuto.

L'edizione originale del 1893 riporta un'illustrazione del risultato, che Carroll chiama «borsa di Fortunato». Il riferimento è a una storia del XV secolo, in cui l'omonimo protagonista riceve dalla Fortuna una borsa dall'inesauribile contenuto. Carroll nota che nella borsa cucita secondo le sue istruzioni, «ciò che è dentro è fuori, e ciò che è fuori è dentro: dunque c'è tutta la ricchezza del mondo». Anche se ammette che, per cucire la borsa di Fortunato, «ci vorrà del tempo: meglio farlo dopo il tè». Per chi voglia veramente provarci, sembra che sia più agevole farlo a maglia o all'uncinetto.



Dal virtuale al reale. Bottiglie di Klein, termine con cui in realtà ci si riferisce a una superficie senza separazione tra «dentro» e «fuori».