**di Piergiorgio Odifreddi**
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

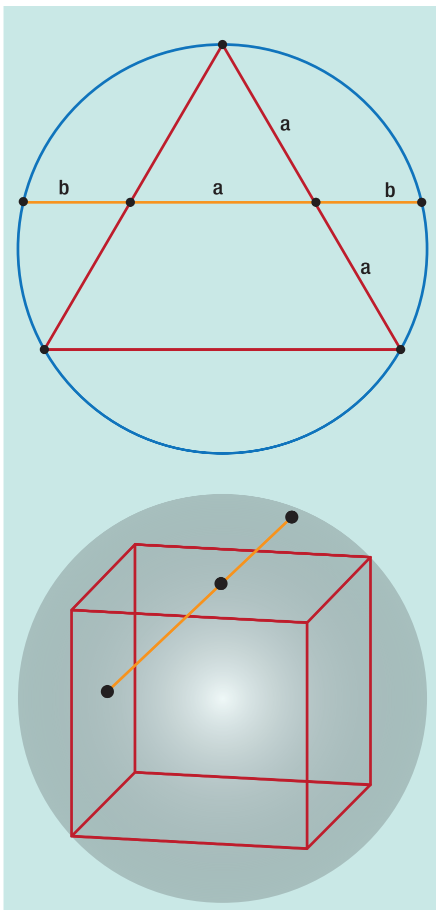
# Aurea soliditas

## Viaggio nel mondo della proporzionalità aurea, dai Pitagorici ai giorni nostri

In una delle sue *Odi*, la decima del secondo libro, Orazio propone come ideale di vita l'*aurea mediocritas*. L'espressione non va tradotta come «aurea mediocrità», ma come «proporzionalità aurea», ed è stata introdotta in Occidente dai Pitagorici. In Oriente, invece, la cosiddetta «regola aurea» appartiene alla tradizione sia buddhista sia confuciana. Mentre nell'etica la proporzione aurea si riduce a un vago «giusto mezzo», in matematica si manifesta in modo più preciso e meno banale. I Pitagorici la definirono come la divisione di una grandezza in due parti $a$ e $b$, tali che il rapporto fra l'intera grandezza $a + b$ e la sua parte aurea $a$ è uguale al rapporto fra la parte aurea $a$ e la parte rimanente $b$. In formule, $(a + b)/a = a/b$. O, equivalentemente, $(a + b) \times b = a \times a$.

L'esempio più significativo scoperto dai Pitagorici fu il rapporto fra la diagonale e il lato del pentagono regolare. E poiché la proporzione aurea interviene nella struttura del pentagono regolare, per costruire quest'ultimo bisogna saper costruire la prima. La cosa non è difficile, ma non è neppure banale, e le Proposizioni II.11 e VI.30 degli *Elementi* di Euclide mostrano come farlo in due maniere complementari: dividendo un segmento dato in proporzione aurea, ed estendendo un segmento dato in proporzione aurea.

Sorprendentemente, i Greci mancarono però la più semplice costruzione della proporzione aurea. Quella cioè pubblicata nel 1983 sull'«American Mathematical Monthly» da Donald Coxeter in un diagramma con un'unica parola di commento: *Behold!*, «Voilà!». Il diagramma mostrava un triangolo equilatero inscritto in un cerchio, e una parallela alla base passante per i punti medi degli altri due lati: la parte $a$ dentro il triangolo è in proporzione aurea con la parte $b$ fuori di esso, ma dentro il cerchio (*figura in alto*).




Per convincersene, ci sono almeno due modi diversi. Il primo fa appello alla Proposizione III.35 di Euclide, il cosiddetto teorema delle due corde: se due corde di un cerchio si intersecano, il prodotto delle loro parti è costante. Nel caso in questione, le due corde sono un lato del triangolo equilatero, diviso in due parti uguali di lunghezza $a$, e la corda parallela alla base, divisa in due parti di lunghezza $a + b$ e $b$.

Il secondo modo è la soluzione originale del problema, pubblicata dopo tre anni sulla rivista da Jan Van de Craats. Questa volta si considerano due triangoli opposti, aventi uno lati $a$ e $b$, e l'altro lati $a + b$ e $a$, e si nota che sono simili. Infatti una coppia di angoli è opposta al vertice in comune. E le altre due coppie sono uguali per la Proposizione III.21 di Euclide, secondo cui angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco sono uguali. La proporzionalità aurea fra $a$ e $b$ deriva allora dalla proporzionalità dei lati dei due triangoli simili.

Benché pubblicata da Coxeter, la nuova costruzione della proporzione aurea era stata trovata da George Odom, un artista che negli anni sessanta aveva raggiunto un certo successo costruendo macchine luminose a fibre ottiche. Dopo essere caduto in depressione, dai primi anni ottanta Odom vive internato nel manicomio di Poughkeepsie, nello Stato di New York, e i suoi soli contatti con il mondo esterno li ha avuti scrivendo a Coxeter e a un frate francescano.

Oltre che nel triangolo equilatero, Odom ha trovato occorrenze della proporzione aurea in due solidi regolari inscritti in una sfera. Nel tetraedro, nel segmento che passa per i punti medi di due lati adiacenti e interseca la sfera. E nel cubo, nel segmento che passa per i punti medi di due facce adiacenti e interseca la sfera (*figura in basso*). E il risultato sul triangolo equilatero inscritto in un cerchio non è altro che un modo diverso di guardare a quello sul tetraedro inscritto in una sfera, tagliando quest'ultimo con un piano passante per una faccia.

In questo modo scopriamo che la proporzione aurea compare in tutti i solidi regolari. Ovviamente nel dodecaedro, a causa delle sue facce pentagonali. E nell'icosaedro, per dualità, perché i punti medi delle facce di un dodecaedro non sono altro che i vertici di un icosaedro. Ma anche, più sorprendentemente, nel tetraedro e nel cubo, per i risultati ottenuti da Odom. E nell'ottaedro, per dualità, perché i punti medi delle facce di un cubo non sono altro che i vertici di un ottaedro. Il che ci fornisce una nuova conferma del fatto che i cinque solidi platonici costituiscono un esempio aureo, e tutt'altro che mediocre, di proporzionalità matematica.