di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Misura per misura

Come sapere se due aree sono uguali, secondo Euclide e David Hilbert

Naturalmente non c'è bisogno di ricordare l'enunciato del teorema di Pitagora. Ma c'è forse bisogno di notare che, benché parli di aree, non richiede una loro misura: basta sapere quand'è che due aree sono uguali. E uno dei modi di saperlo, senza misurarle, è scomporne una in pezzi che si possono ricomporre nell'altra, come faceva appunto Euclide.

I Greci avevano ottimi motivi per evitare di parlare di una misura dell'area: i numeri reali non erano ancora stati definiti, e i soli numeri razionali potevano fornire solo approssimazioni. O, almeno, sembrava che avessero ottimi motivi. Fino al 1899, quando il tedesco David Hilbert mostrò nel suo libro su *I fondamenti della geometria* che cosa Euclide avrebbe potuto fare, con i soli mezzi a sua disposizione.

L'idea è misurare le aree mediante segmenti. Il che richiede di sviluppare in maniera geometrica un'algebra dei segmenti, per definire su di essi le solite operazioni definite sui numeri. Precisamente, la «somma» di due segmenti viene definita come la loro concatenazione rettilinea. Una volta fissati come riferimenti due assi incidenti, non necessariamente perpendicolari, e un segmento unitario *OU*, il «prodotto» $OA \times OB$ di due segmenti *OA* e *OB* posti sui due assi, con un estremo nell'origine *O*, si definisce tirando dall'altro estremo *A* la parallela alla retta che passa per *B* e per *U* (*si veda la figura*), *AP*. *OP* è il prodotto. Il motivo è che in questo modo si generano due triangoli simili, i cui lati sono proporzionali fra loro: dunque, un fattore sta all'unità come il prodotto sta all'altro fattore.

Se si prova a dimostrare per esempio la «commutatività del prodotto», si devono scambiare le posizioni dei due segmenti sui due assi. Si ottengono così sei punti: uno è l'estremo del segmento unitario, due gli estremi dei segmenti originari, uno l'estremo del loro prodotto e due gli estremi dei segmenti scambiati. Che il prodotto di questi due ultimi finisca esattamente nello stesso punto in cui finiva il prodotto dei segmenti originari, è una conseguenza del teorema di Pappo, del 300 d.C. circa, che stabilisce che «in un esagono con i vertici alterni su due rette incidenti, se due coppie di lati opposti sono paralleli, lo sono anche i lati della terza coppia».

Questo teorema permette di dimostrare non solo la commutatività del prodotto, ma anche l'associatività e la distributività sulla somma: cioè tutte le proprietà che servono per l'algebra dei segmenti. E poiché il teorema si può dimostrare in maniera elementare, una sua dimostrazione mette automaticamente a disposizione un'algebra di segmenti, che si può sfruttare per definire una misura dell'area per i poligoni, relativamente all'area di riferimento di un quadrato di lato unitario.

Il punto di partenza è, ovviamente, la definizione dell'area di un triangolo nel solito modo, in termini di «base per altezza diviso due». Che il risultato non dipenda da quale lato si scelga come base è una banale conseguenza delle proprietà dei triangoli simili.

Una volta definita l'area di un triangolo, l'area di un poligono si ottiene facilmente, come somma delle aree dei triangoli di una sua triangolazione. Perché la cosa funzioni, bisogna ovviamente dimostrare che il risultato non dipende dalla triangolazione scelta: la cosa non è banale, ma non richiede l'uso di assiomi o di tecniche particolari.

Inoltre, la misura dell'area per i poligoni è sostanzialmente unica, nel senso che qualunque misura additiva che assegni a triangoli uguali (come poligoni) aree uguali (come segmenti), e che assegni a ciascun quadrato (come poligono) un'area pari al quadrato del suo lato (come segmento), assegna a ciascun poligono la stessa misura di quella che abbiamo appena descritto.

Arrivati a questo punto abbiamo a disposizione due nozioni di uguaglianza di area per i poligoni. Una è quella di Euclide, mediante scomposizione e ricomposizione. E l'altra è quella di Hilbert, come coincidenza della misura dell'area. Essendo però la geometria il migliore dei mondi possibili, le due nozioni coincidono, nel senso che due poligoni si possono decomporre e ricomporre uno nell'altro se e solo se hanno la stessa misura di area.

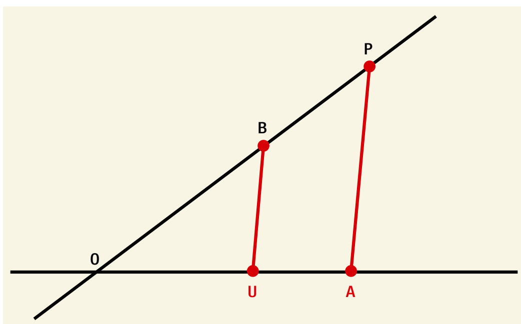

Figura di riferimento. Il tedesco David Hilbert, uno dei più importanti matematici del Novecento.

Emilio Segre Visual Archives/American Institute Of Physics/SPL/Contrasto