

di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)



Un teorema «divino»

Partendo dall'esistenza di Dio si dimostra che la matematica non è contraddittoria

“**D**io esiste, perché la matematica non è contraddittoria. E il diavolo esiste, perché non possiamo dimostrarlo», diceva André Weil. Un lungo manoscritto natalizio di Harvey Friedman, datato 25 dicembre 2012 e intitolato *A Divine Consistency Proof for Mathematics*, mostra nei dettagli come, partendo dall'ipotesi dell'esistenza di Dio, si può dimostrare che la matematica non è contraddittoria. Forse, dunque, Dio c'è, ma il diavolo no.

Per capire di che stiamo parlando, dobbiamo fare un passo indietro di parecchi anni. Fu infatti nel 1077 che Anselmo d'Aosta inventò la cosiddetta «dimostrazione ontologica» dell'esistenza di Dio, che nella versione di Cartesio nel *Discorso sul metodo*, del 1637, si riduce al seguente giochetto. Definiamo Dio come l'essere perfettissimo, alla maniera del catechismo. Poiché l'esistenza è una perfezione, Dio avrà pure quella. Dunque, esiste.

Nel breve saggio del 1676 *Sull'esistenza dell'essere perfettissimo*, Leibniz obiettò che Anselmo e Cartesio se l'erano cavata un po' troppo a buon mercato. Prima di poter dedurre l'esistenza concreta di qualcosa da un ragionamento astratto, infatti, bisogna almeno dimostrare che quel qualcosa è possibile. Nel caso di Dio, definito come essere perfettissimo, bisogna dunque dimostrare che è possibile che qualcuno abbia tutte le perfezioni. E la dimostrazione che Leibniz propose è che, essendo le perfezioni compatibili a due a due, allora si possono considerare una dietro l'altra, dimostrando alla fine la compatibilità di tutte.

Quando nel 1942 Kurt Gödel vide questa supposta dimostrazione, gli si drizzarono i capelli. In matematica e in logica, infatti, non basta che certe proprietà siano compatibili fra loro due a due affinché lo siano tutte insieme! Per esempio ci sono numeri maggiori di qualunque coppia di interi, ma questo non significa affatto che ci siano numeri maggiori di tutti gli interi.

Gödel decise di vedere se si poteva in qualche modo rimediare all'errore di Leibniz. Sostituì anzitutto le imprecise «perfezioni» di Cartesio con precise «proprietà positive», definite in analogia

con la positività dei numeri, appunto. In particolare, postulò che le proprietà positive avessero le caratteristiche logiche corrispondenti a questi ovvi fatti aritmetici: primo, il prodotto di due numeri positivi è positivo; secondo, lo zero non è un numero positivo; terzo, dato un numero diverso da zero, o lui o il suo opposto sono positivi; e quarto, un numero maggiore di un numero positivo è anch'esso positivo. Insieme di proprietà aventi queste caratteristiche sono ben noti in logica e in matematica, e sono chiamati «ultrafiltri».

Gödel definì Dio come un «essere positivissimo», cioè avente tutte le proprietà positive. E dimostrò facilmente che, nel caso di

un universo finito, Dio esiste e ha esattamente tutte e sole le proprietà positive. Il caso di un universo infinito è più complicato, ma Gödel dimostrò che anche in quel caso Dio esiste, purché si faccia un'ipotesi aggiuntiva: che «essere Dio» sia anch'essa una proprietà positiva.

L'ipotesi aggiuntiva è controversa, naturalmente. Ma, soprattutto, rende banale la dimostrazione, perché equivale a dire che le proprietà positive sono appunto tutte compatibili fra loro: dunque è solo un modo mascherato di postulare che l'essere perfettissimo esiste.

Friedman ricorda di aver trovato particolarmente sorprendente la connessione matematica con gli ultrafiltri. Questi ultimi, infatti, se hanno certe particolari proprietà (per esempio se sono «numerabilmente completi»), permettono dimostrazioni di consistenza di sistemi formali anche molto forti, come quelli usati normalmente nella teoria degli insiemi (per esempio il sistema ZFC di Zermelo e Fraenkel, con l'assioma di scelta).

Il problema era che l'ultrafiltro usato da Gödel, come si è detto, è banale. Si trattava dunque di trovarne uno che fosse teologicamente rilevante come quello, ma allo stesso tempo matematicamente non banale, in modo da permettere una dimostrazione di consistenza. Ora che Friedman è riuscito a farlo, diventa un naturale candidato per il premio Templeton per la scienza e la religione, che è per statuto più ricco del premio Nobel: un milione e centomila sterline! Oltre che, naturalmente, un candidato per il paradiso: se non quello canonico, almeno quello dei matematici.



Tra scienza e religione. Harvey Friedman, della Ohio State University a Columbus, concorre al premio Templeton.