di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Hexagrammum mysticum

Che cosa ha ottenuto il genio di Pascal da un esagono inscritto in una conica?

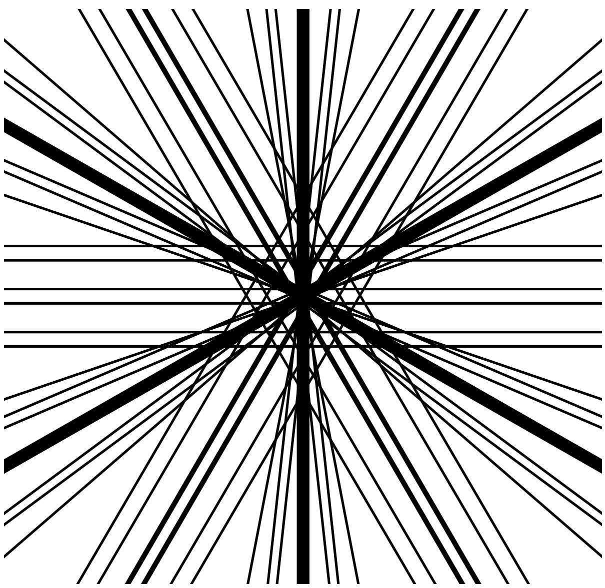
Nel 1639, a soli 16 anni, Blaise Pascal trovò un meraviglioso teorema: se un esagono è inscritto in una conica, allora le tre intersezioni delle coppie di lati opposti stanno su una stessa retta, che viene chiamata retta di Pascal. Per conica si intende, ovviamente, la sezione di un cono. Cioè un'ellisse, una parabola o un'iperbole. Ma anche, quando il piano secante passi per il vertice del cono, una coppia di rette incidenti: in questo caso il teorema di Pascal si riduce al cosiddetto teorema di Pappo, che risale addirittura al 300 d.C. circa.

Per esagono si intende, altrettanto ovviamente, un insieme di sei punti 123456, collegati consecutivamente da sei lati 12, 23, 34, 45, 56 e 61. Ma niente richiede che i sei punti siano consecutivi sulla conica: per esempio, quando il loro ordine consecutivo è 135264, si ottiene uno strano esagono intrecciato.

Dato un insieme di sei punti 123456, vale la pena di studiare la struttura delle sue rette di Pascal. Il plurale è dovuto al fatto che i sei punti possono formare un esagono in molti modi diversi. Precisamente, ci sono 720 combinazioni possibili, perché ciascuno dei sei punti può essere unito con un lato a ciascuno dei cinque rimanenti. E ciascuno di questi, a ciascuno dei quattro rimanenti. E così via. E il prodotto dei numeri 6, 5, 4, 3, 2 e 1 è appunto 720.

In altre parole, ci sono 720 permutazioni della sequenza 123456. Ma non tutte producono esagoni diversi. Anzitutto, perché l'ordine non conta: per esempio, 123456 e 654321 corrispondono allo stesso esagono, e questo dimezza le possibilità. E poi, perché neppure il punto di partenza conta: per esempio, 123456 e 234561 corrispondono allo stesso esagono, e questo divide per sei le possibilità rimanenti. Ogni insieme di sei punti genera dunque 60 esagoni, e 60 corrispondenti rette di Pascal.

Dato un esagono 123456, si possono considerare quelli da esso disgiunti, nel senso che nessuno dei loro lati coincide con un lato dell'esagono di partenza. Ce ne sono esattamente tre: oltre al già citato 135264, anche 351426 e 136425. Nel 1849 Thomas Kirkman si accorse che le loro rette di Pascal si intersecano in uno stesso punto, che è chiamato punto di Kirkman.



Soluzione. Le rette di Pascal di un esagono regolare. Mancano quelle all'infinito, determinate dai lati paralleli.

Di punti di Kirkman ce n'è uno per ogni esagono fissato, e ce ne sono 60 per le sue possibili variazioni. I 60 punti di Kirkman e le 60 rette di Pascal costituiscono un piano proiettivo di configurazione: cioè, ogni retta di Pascal contiene esattamente tre punti di Kirkman, e ogni punto di Kirkman sta esattamente su tre rette di Pascal.

Nel 1877 Giuseppe Veronese dimostrò che i 60 punti di Kirkman e le 60 rette di Pascal si dividono in sei insiemi di dieci punti e dieci rette ciascuno. E ciascuno di questi insiemi costituisce un piano proiettivo di configurazione. Più precisamente, costituisce una configurazione di Desargues, in cui sei punti e sei rette sono i vertici e i lati di due triangoli, tre rette uniscono i vertici corrispondenti e si incontrano in un punto e tre punti uniscono i lati corrispondenti e stanno su una stessa retta.

Colorando con sei colori gli elementi dei sei insiemi, si nota che tre rette di Pascal di colori diversi si incontrano in uno stesso punto, che viene chiamato punto di Steiner. E già nel 1828 Jakob Steiner si accorse che un tale punto corrisponde all'intersezione delle rette di Pascal di un esagono 123456, e dei due che hanno lati alterni coincidenti con i suoi: cioè 125634 e 236145. Di punti di Steiner ce ne sono dunque solo 20. Ogni retta di Pascal ne contiene esattamente uno, e ogni punto di Steiner sta esattamente su tre rette di Pascal, di colore diverso.

Analogamente, si nota che tre punti di Kirkman di colori diversi determinano una stessa retta, che viene chiamata retta di Cayley, essendo stata trovata da Arthur Cayley nel 1846. Di nuovo ci sono solo 20 rette di Cayley, che insieme ai 20 punti di Steiner formano un piano proiettivo di configurazione: cioè, ogni retta di Cayley contiene esattamente tre punti di Steiner, e ogni punto di Steiner sta esattamente su tre rette di Cayley.

A loro volta i punti di Steiner sono allineati, a quattro a quattro, su 15 rette di Plucker. E le rette di Cayley si incontrano, quattro a quattro, in 15 punti di Salmon. Si ottiene così un piano proiettivo di configurazione. E si scopre che Pascal aveva visto lontano, quando aveva battezzato *Hexagrammum Mysticum*, «esagramma mistico», la struttura delle rette che portano il suo nome.