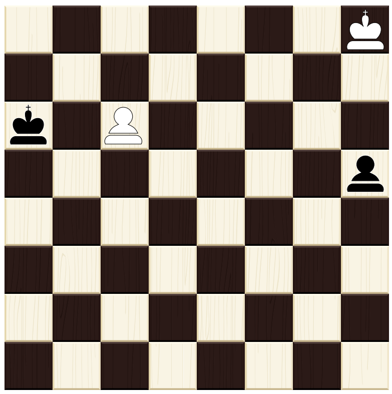
di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Questa geometria ti piacerà

La geometria del taxi misura le distanze sommando tratti perpendicolari tra due punti

Verso la fine dell'Ottocento Hermann Minkowski introdusse un'interessante e sorprendente geometria, che fu popolarizzata nel 1952 da Karl Menger in un'esibizione al Museo della scienza di Chicago, intitolata *Questa geometria ti piacerà*. Si tratta della geometria del taxi, così chiamata perché misura le distanze alla maniera del tassametro del taxi in città a griglia quadrata, come il centro storico di Torino, il quartiere Ensanche di Barcellona, o Midtown Manhattan a New York.



Poiché ovviamente, e per fortuna, i taxi non possono passare attraverso gli edifici, ma sono costretti a seguire il percorso stradale, il tassametro non misura la distanza in linea d'aria, bensì quella ottenuta sommando i percorsi perpendicolari che conducono da un punto all'altro. Nella geometria del taxi, dunque, invece di usare il teorema di Pitagora ed estrarre la radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze delle coordinate, si sommano direttamente queste differenze.

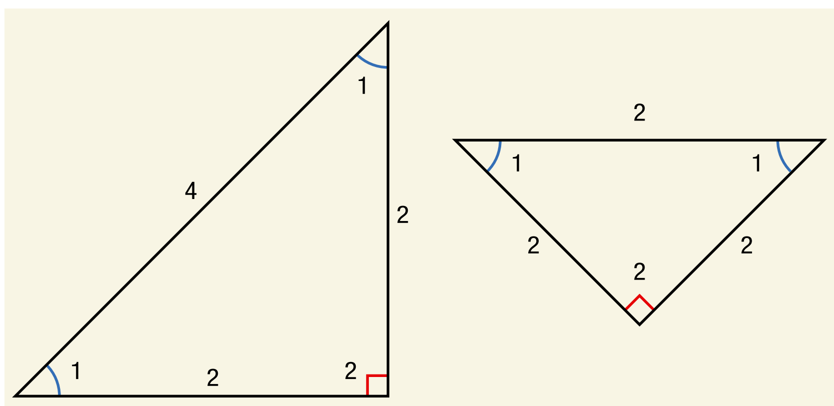
Volendo, la geometria del taxi si potrebbe anche chiamare geometria degli scacchi, perché è esattamente il modo in cui la torre misura la distanza fra due caselle sulla scacchiera disposta nel modo solito. La stessa distanza la misura anche l'alfiere, questa volta procedendo lungo le diagonali. Quanto al re o alla regina, essi possono sfruttare la geometria degli scacchi andando da un punto all'altro in modi diversi, sempre con lo stesso numero di mosse: per esempio in linea retta, a zig-zag o in diagonale.

È proprio questa possibilità a permettere, per esempio, una via d'uscita da una situazione apparentemente disperata proposta dallo scacchista e matematico cecoslovacco Richard Réti nel 1921 (*nell'illustrazione*). Il re bianco è troppo lontano dal pedone nero per impedirgli verticalmente di andare a regina. Ed è anche troppo lontano dal pedone bianco per poterlo difendere orizzontalmente dal re nero. Ma può lasciarsi aperte entrambe le possibilità, muovendo diagonalmente. Se il pedone nero deciderà di andare a regina, il re bianco potrà risalire, proteggere il proprio pedone, e mandare pure esso a regina. Se invece il re nero attaccherà il pedone bianco, il re bianco potrà scendere e attaccare a sua volta il pedone nero.

L'interesse della geometria del taxi, o degli scacchi, sta nel fatto che soddisfa tutti gli assiomi soliti della geometria, meno il criterio: «Due triangoli aventi due lati e l'angolo compreso uguali, sono uguali». È facile, ricordando che la distanza tra due punti si misura muovendosi in direzioni perpendicolari, e non in diagonale, costruire due triangoli rettangoli con i cateti uguali ma ipotenuse diverse. Dunque, le proprietà della geometria euclidea che falliscono nella geometria del taxi non sono dimostrabili senza il criterio.

I due triangoli qui sotto sono ovviamente simili, ma i lati non sono proporzionali fra loro: se no, essendo i cateti uguali, dovrebbero esserlo anche le ipotenuse. Quello di destra, in particolare, è un triangolo rettangolo equilatero, in cui ovviamente il quadrato dell'ipotenusa non può essere uguale alla somma dei quadrati dei cateti. Considerando un cateto come base, è anche un triangolo isoscele con gli angoli alla base diversi. Ne segue che le proprietà citate dei triangoli simili, rettangoli o isosceli, non si possono dimostrare senza il criterio.

Chi crede che la geometria dei taxi si comporti stranamente riguardo ai triangoli, deve però aspettare di vedere le sue coniche.



Per quanto riguarda ellissi e iperboli, nella geometria euclidea si possono definire in due maniere equivalenti: rispetto a un fuoco e una direttrice, e rispetto a due fuochi. Poiché questo non è più vero nella geometria del taxi, l'equivalenza dei due approcci alle coniche, attraverso un fuoco e una direttrice o attraverso due fuochi, non è dimostrabile senza il criterio.

Nel caso di un fuoco e una direttrice si ottengono delle spezzate a quattro lati. Nel caso di due fuochi si ottengono invece figure diverse, che variano a seconda della posizione relativa dei due fuochi. Chi voglia divertirsi a disegnare le une e le altre, scoprirà che la geometria del taxi riserva molte sorprese: per esempio i cerchi risultano essere veri e propri quadrati, con gran confusione dei taxisti e dei loro clienti.