

di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)



Il tassaratto è un politopo

Ritratto dell'ipercubo, tra matematica, geometria e architettura

Muovendo un punto in linea retta per una certa distanza si ottiene un segmento. Muovendo il segmento perpendicolarmente a se stesso, e per la stessa distanza, si ottiene un quadrato. Muovendo il quadrato perpendicolarmente a se stesso, un cubo. E muovendo un cubo, un ipercubo: cioè, una versione quadridimensionale del cubo tridimensionale, appunto. Questa sua genesi giustifica il nome di «tassaratto», «raggio quadruplicato» (da *tesseris*, «quattro», e *aktines*, «raggio») che Charles Hinton gli diede nel 1888, in *A New Era of Thought*.

Ragionando astrattamente si intuisce che, poiché il movimento che genera l'ipercubo a partire dal cubo sposta quest'ultimo in un'altra posizione, i suoi otto vertici raddoppiano: dunque, l'ipercubo ha 16 vertici. Anche i 12 lati del cubo raddoppiano, ma a essi si aggiungono i nuovi lati generati dal movimento dei suoi otto vertici: dunque l'ipercubo ha 32 lati. Analogamente, le sei facce del cubo raddoppiano, e a esse si aggiungono quelle generate dal movimento dei suoi 12 lati: dunque, l'ipercubo ha 24 facce quadrate. Infine, il cubo stesso raddoppia, e bisogna aggiungere i nuovi cubi generati dal movimento delle sei facce: dunque l'ipercubo ha otto iperfacce cubiche.

Visualizzare concretamente l'ipercubo è più complicato, perché la sua costruzione richiede una quarta dimensione ortogonale alle tre solite: dunque, una in più di quelle a nostra disposizione. Poiché però anche la visualizzazione di un oggetto tridimensionale richiede una dimensione in più di quelle a disposizione di una tela bidimensionale, basta estendere le tecniche di rappresentazione pittorica, in particolare le proiezioni.

Vista la complessità dell'ipercubo, può essere istruttivo considerare proiezioni su piani e da punti di vista privilegiati. Per esempio, quelle analoghe alle proiezioni di un cubo su un piano passante per una delle sue facce, che così non viene cambiata dalla proiezione, da un punto di vista situato in una posizione simmetrica, che trasmette alla proiezione la sua simmetria.

Nel caso che il punto di vista sia all'infinito, la proiezione è

semplicemente la faccia anteriore, che copre esattamente la faccia posteriore. Quando il punto di vista si avvicina al cubo, la proiezione della faccia anteriore si allarga, quella della faccia posteriore rimane invariata e le quattro facce laterali sono proiettate come trapezi. Analogamente si ottengono le proiezioni dell'ipercubo su un iperpiano passante per una delle sue iperfacce. Se il punto di vista è all'infinito, si vede semplicemente un cubo. Quando il punto di vista si avvicina all'ipercubo si vedono due cubi, uno interno e uno esterno, e sei trapezoidi.

Questa rappresentazione dell'ipercubo è forse la sua più nota e intuitiva. Si tratta di una struttura che si genera spontaneamente in natura, immergendo un cubo di filo di ferro nell'acqua per le bolle di sapone. In architettura, invece, è stata realizzata artificialmente nel 1979 da Miguel Angel Ruiz Larrea nel Monumento a la Constitución di Madrid, e nel 1989 da Otto von Spreckelsen nella Grande Arche de la Défense a Parigi.

Molto più intuitivi delle proiezioni sono però i dispiegamenti di un oggetto multidimensionale in uno spazio a una dimensione in meno. Per esempio del cubo sul piano: come mostrò per primo Albrecht Dürer nel 1525, nel quarto volume del *Trattato sulla misura con riga e compasso*, esso si può infatti ridurre a una croce composta di sei quadrati, corrispondenti alle sue sei facce. Analogamente, dispiegando un ipercubo nello spazio si può ottenere una croce solida composta di otto cubi, raffigurata da Salvador Dalí nel 1954 in *Crocifissione*,

che reca l'appropriato sottotitolo *Corpus Hypercubicus*. Come la croce piana si può ripiegare nello spazio a formare un cubo, la croce solida si può ripiegare nello spazio quadridimensionale a formare un ipercubo. Nello spazio tridimensionale la cosa non è invece possibile, a meno di cataclismi come quello immaginato da Robert Heinlein, nel 1941, nel suo racconto di fantascienza *La casa nuova*. Un edificio, quello immaginato da Heinlein, che in partenza non doveva apparire troppo diverso dal *Model Maison d'Artiste* di Theo Van Doesburg, del 1923, o dall'*Habitat 67* di Moshe Safdie, a Montreal.



Architettura ipercubica. La Grande Arche de la Défense a Parigi, realizzato dall'architetto danese Otto von Spreckelsen.