

di Piergiorgio Odifreddi

professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)



Immagini dal paradiso

Come dimostra la *Divina Commedia*, l'ipersfera non riguarda solo i matematici

Se si considerano i punti equidistanti da un centro nello spazio unidimensionale, cioè su una retta, si ottiene una coppia di punti. Nello spazio bidimensionale, cioè su un piano, un cerchio. Nello spazio tridimensionale, una sfera. E nello spazio quadridimensionale, un'ipersfera. Ed è appunto un'ipersfera quello che Charles Hinton ed Edwin Abbott hanno descritto, rispettivamente nel 1880 e nel 1882, in *Che cos'è la quarta dimensione?* e in *Flatlandia*, attraverso le tracce sferiche che essa lascia mentre attraversa lo spazio tridimensionale.

Le tracce partono da un punto, crescono fino a raggiungere una sfera massima e poi decrescono di nuovo fino a un punto. Sostanzialmente, il passaggio di un'ipersfera nello spazio tridimensionale somiglia dunque a un pallone che si gonfia e si sgonfia in modo uniforme.

Quella di Hinton e Abbott non è però la prima immagine storica dell'ipersfera, che risale invece a molti secoli prima di loro. Come scoprì nel 1925 il matematico svizzero Andreas Speiser nei *Branzi classici della matematica*, se ne ritrova una addirittura nella *Divina Commedia*!

Adottando il sistema tolemaico, Dante descrive infatti il mondo come una serie di nove sfere crescenti centrate attorno alla Terra, rappresentanti i cieli nell'ordine classico: Luna, Mercurio, Venere, Sole, Marte, Giove, Saturno, Stelle Fisse e Primo Mobile. Quest'ultimo è il massimo della serie, e a un tempo racchiude l'universo sensibile e «non ha altro dove che la mente divina».

Oltre il Primo Mobile si trova l'Empireo, che Dante raffigura come una simmetrica serie di nove sfere concentriche decrescenti, rispettivamente sedi di Angeli, Arcangeli, Principati, Potestadi, Virtù, Dominazioni, Troni, Cherubini e Serafini. Al centro sta un punto di luce abbagliante, che rappresenta Dio.

Beatrice spiega paradossalmente che, in realtà, quel punto è la sfera maggiore e racchiude tutto ciò che sembra racchiuderlo. L'universo dantesco si compone dunque di due serie di sfere distinte, una sensibile e crescente e l'altra celeste e decrescente, i cui centri sono rispettivamente la Terra e Dio.

Questa complicata struttura richiama le proiezioni stereografiche polari della Terra, che consistono similmente di due serie di cerchi concentrici. Chi guardasse la Terra dal Polo Sud vedrebbe infatti, come Dante, una serie di cerchi crescenti, corrispondenti ai paralleli dell'emisfero meridionale, che raggiungono un massimo all'equatore.

Recatosi su questo, vedrebbe poi i paralleli dell'emisfero settentrionale come una serie di cerchi decrescenti, che raggiungono un minimo nel Polo Nord. Se però la Terra si aprisse come un fiore, i paralleli settentrionali circonderebbero quelli meridionali, e il Polo Nord si dispiegherebbe intorno a tutto.

Analogamente, se l'ipersfera dantesca potesse dispiegarsi nello spazio quadridimensionale, il punto divino diventerebbe una sfera che racchiuderebbe tutte le altre.

Sorprendentemente, questo è esattamente il modo in cui vediamo l'universo oggi, attraverso il telescopio: lo sferico fronte di espansione delle galassie, che si trova alla distanza percorsa dalla luce dal momento del big bang, in realtà non è altro che l'immagine dispiegata di quel solo istante.

Abbiamo dunque due modi di immaginarci l'ipersfera. Alla maniera di Abbott, attraverso una successione dinamica di sfere, dapprima crescenti e poi decrescenti. O alla maniera di Dante, mediante una doppia serie statica di sfere concentriche, di cui le due esterne sono in realtà coincidenti fra loro.

Un terzo modo si ottiene, ancora una volta, per analogia con la sfera solita. Quest'ultima si può considerare come una serie di cerchi massimi disposti circolar-

mente e tutti intersecantisi in due punti: per esempio, come una serie di meridiani disposti attorno all'equatore, e che si intersecano nei poli.

Nel 1931 Heinz Hopf scoprì che l'ipersfera si può considerare come una serie di cerchi massimi disposti sfericamente, ma non intersecantisi e tutti inanellati fra loro. Questa rappresentazione oggi si chiama «fibrato di Hopf», e proiettata stereograficamente nello spazio tridimensionale assume la forma di un cosiddetto «toro di Clifford»: un nuovo modo, non canonico, di rappresentarsi il Paradiso!



La versione di Doré. Scena del Paradiso della *Divina Commedia* incisa dal francese Gustave Doré nel XIX secolo.