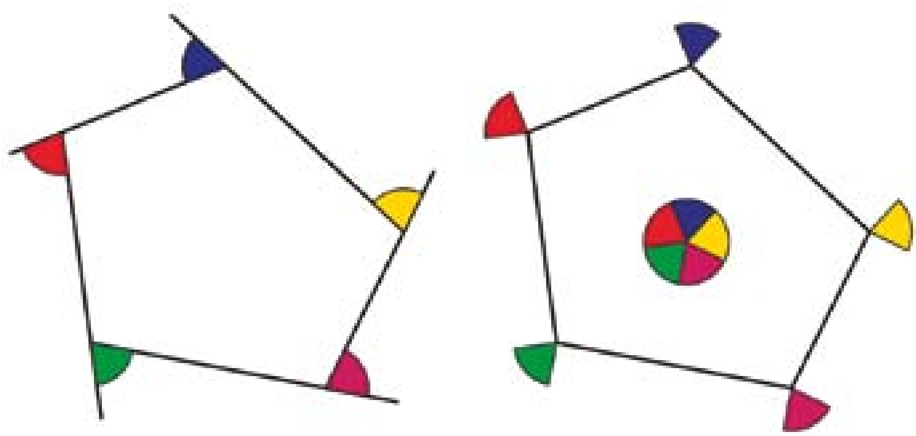
di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Un teorema affogato e riemerso

Come Eulero riscoprì Cartesio traendone fama nella dottrina dei solidi

Dopo la sua morte in Svezia nel 1650, i manoscritti di Cartesio furono riportati in Francia, ma la cassa che li conteneva cadde nella Senna. Vari documenti furono salvati e asciugati, e nel 1676 Leibniz poté fare copie di alcuni di essi. In seguito i manoscritti di Cartesio andarono perduti, e le copie di Leibniz rimasero inedite. In particolare si perse traccia di un'osservazione che Cartesio aveva fatto negli *Esercizi sugli elementi dei solidi*, scritto nel 1620, e che Leibniz aveva ricopiato: si trattava del fatto che i numeri V dei vertici, L dei lati e F delle facce di un solido regolare sono legati dalla semplice relazione $V - L + F = 2$.

L'osservazione rimase inedita fino al 1860, quando fu pubblicata da Eugène Prouhet nelle *Note su un passaggio delle opere inedite di Cartesio*. Nel frattempo però era stata riscoperta nel 1750 da Eulero, negli *Elementi della dottrina dei solidi*. Egli notò che, dal punto di vista topologico, i cinque solidi regolari non sono altro che grafi sulla sfera, come si vede gonfiandoli come un pallone. E il fatto che i solidi siano regolari non è rilevante: la relazione precedente vale non solo per quei cinque grafi regolari sulla sfera, ma per tutti.



Oggi la relazione si chiama ingiustamente caratteristica di Eulero, ma si ricorda giustamente come teorema di Cartesio l'osservazione da cui egli l'aveva dedotta: il fatto che, come in un poligono convesso la somma degli angoli piani esterni è uguale a 2π, così in un poliedro convesso la somma degli angoli solidi esterni è uguale a 4π. La dimostrazione per i poligoni è semplice: basta notare che i settori circolari determinati in ciascun vertice dalle perpendicolari ai lati, formano un cerchio intero (*si veda l'illustrazione*). E la dimostrazione per i poliedri è analoga, con il cerchio sostituito dalla sfera.

In questa dimostrazione un angolo solido esterno è definito come il settore sferico determinato in un vertice dai piani perpendicolari ai lati che vi confluiscono. Essendo appunto perpendicolari ai lati, ogni coppia di questi piani forma un angolo solido che è supplementare all'angolo piano formato dai corrispondenti lati su una faccia del poliedro. Cartesio intuì allora che gli angoli solidi esterni di un poliedro si possono calcolare mediante gli angoli piani delle sue facce.

In generale, se in un vertice confluisce un numero n di facce, l'area dell'n-gono sferico corrispondente all'angolo solido esterno è uguale alla somma degli n angoli formati dagli n piani che lo definiscono, meno $(n - 2)\pi$. Poiché tutti i π si cancellano, meno due, l'angolo esterno in un vertice di un poliedro è pari a 2π meno la somma degli angoli delle facce che vi confluiscono.

A questo punto possiamo calcolare l'angolo esterno solido totale di un poliedro con V vertici, L lati e F facce: cioè la somma di tutti i suoi angoli esterni. Si tratta di sommare gli angoli esterni di tutti vertici, sottraendo da $2\pi V$ la somma degli angoli di tutte le facce. E poiché la somma degli angoli di una faccia con un numero l di lati è $(l - 2)\pi$, e ciascun lato viene calcolato due volte perché sta su due facce, la somma degli angoli di tutte le facce è $(2L - 2F)$. In definitiva, l'angolo esterno solido totale è uguale a 2π moltiplicato per la caratteristica di Eulero.

L'interesse di questa relazione, che lega la caratteristica di Eulero di un poliedro alla somma dei suoi angoli esterni, sta nel fatto che questi ultimi sono una misura della curvatura nei vertici. Infatti un angolo esterno misura uno scarto dall'angolo di 2π, che corrisponderebbe a un appiattimento delle facce su un piano: maggiore lo scarto, maggiore la curvatura nel vertice. Quanto all'angolo esterno totale, esso misura dunque la curvatura totale del poliedro.

Il teorema di Cartesio si può estendere, con un passaggio al limite, a ogni superficie che si possa approssimare a piacere con poliedri, cioè a ogni superficie chiusa e connessa. In tal caso esso diventa un corollario del cosiddetto teorema di Gauss e Bonnet, dimostrato da Gauss nelle *Disquisizioni generali sulle superfici curve* del 1827, e da Pierre Bonnet nella *Memoria sulla teoria generale delle superfici* del 1848. E lega la caratteristica topologica di Eulero alla curvatura geometrica totale: cioè, alla somma delle curvature di tutti i punti della superficie. In particolare, tramite il teorema di classificazione delle superfici, permette di caratterizzare anche le loro possibili geometrie.