di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Tre porte e due anniversari

Che cosa lega i matematici Paul Erdös e Thomas Bayes al gioco delle tre porte?

I *pillow problem* di Lewis Carroll sono una serie di indovinelli matematici per insonni, e al numero cinque della lista troviamo il seguente. Dentro un'urna c'è una pallina, che è bianca o nera con il 50 per 100 di probabilità. Noi ci aggiungiamo una pallina bianca, agitiamo, ed estraiamo a sorte una pallina bianca. Qual è la probabilità che la pallina rimasta nell'urna sia bianca?

Una versione dello stesso indovinello, a mo' di gioco televisivo, venne riproposta nel 1990 su «Parade», un inserto domenicale distribuito con centinaia di giornali, da Marilyn vos Savant, già nota per aver scritto un libro in cui sosteneva che la teoria della relatività di Einstein è sbagliata. Ma anche per essere stata per molti anni nel Guinness dei primati come titolare del più alto quoziente di intelligenza mai registrato: ben 228!

Il gioco vede un concorrente davanti a tre porte, dietro una delle quali c'è un milione di dollari, mentre dietro alle altre due ci sono solo 1000 dollari. Il concorrente ne sceglie una. Il presentatore, che sa cosa c'è dietro alle porte, ne apre una delle rimanenti che nasconde solo 1000 dollari, e chiede al concorrente se vuole mantenere la scelta della porta o cambiarla. Che cosa gli conviene fare?

Soluzione controintuitiva. La strategia che massimizza la probabilità di vincita al gioco delle tre porte va contro l'intuizione.

In entrambi i casi c'è una risposta intuitiva. Per le palline, visto che se n'è messa nell'urna una bianca e poi la si è tolta, la probabilità che quella rimasta sia bianca o nera è la stessa che c'era in partenza: 50 per 100. Per le porte, visto che dopo che il presentatore ha aperto una porta ne rimangono solo due, ciascuna ha il 50 per 100 di probabilità di nascondere il milione: dunque, non importa quale delle due si scelga, e cambiare la scelta non influenza il risultato.

La cosa finirebbe qui, se non fosse che la signora vos Savant dichiarò che cambiando la porta le probabilità di vincere raddoppiano. Il suo argomento fu che, se non si cambia la porta scelta, le probabilità di perdere sono due su tre: infatti, si vince solo nel caso in cui la porta scelta sia quella che nasconde il milione. Se invece si cambia la porta scelta, le probabilità di perdere sono una su tre: infatti si perde soltanto nel caso in cui la porta scelta sia quella che nasconde il milione. Cambiare scelta aumenta dunque la probabilità di vincere da uno a due terzi.

La cosa scatenò una sollevazione da parte di una decina di migliaia di lettori, un migliaio dei quali matematici di professione, che subissarono il rotocalco con lettere di insulti. Imperterrita, la signora presentò un secondo argomento. Con la sua prima scelta, il concorrente forza il presentatore ad aprire una delle porte che non nascondono il milione. Se non si cambia scelta si gioca da soli, e si vince solo se la porta corretta era quella scelta inizialmente. Se si cambia scelta, si gioca invece insieme al presentatore e si vince se la porta corretta è una delle due non scelte inizialmente. Cambiare scelta aumenta dunque la probabilità di vincere da un terzo a due terzi.

Sulle prime anche il famoso matematico ungherese Paul Erdös, di cui quest'anno ricorre il centenario della nascita, non ci credette. E si convinse solo quando il suo collega Andrej Vázsonyi calcolò la probabilità usando il cosiddetto metodo Montecarlo: simulando cioè il gioco al computer, scegliendo a caso se cambiare scelta o no, e tenendo conto di quando si vinceva e quando no. Il risultato fu che, effettivamente, cambiando scelta si vinceva in media due volte su tre.

Questa volta anche gli esperti chinarono la testa, e dovettero ammettere di aver sbagliato. Ma avrebbero dovuto trovare la risposta corretta fin dagli inizi, visto che essa discende banalmente dal fondamentale teorema di Bayes, che lega fra loro le probabilità assolute e le probabilità relative degli eventi. Un teorema dimostrato da Thomas Bayes e pubblicato nel 1763, esattamente 250 anni fa, in *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*.

Nel caso del problema delle palline, i casi possibili sono tre. Se la pallina estratta è quella inserita in seguito, allora quella rimasta è l'originale, e può essere sia bianca che nera (due possibilità). Se la pallina estratta è quella originale, allora quella rimasta è quella inserita, che è bianca (una possibilità). Nei tre casi, due volte la pallina rimasta è bianca: quindi la probabilità che sia bianca è due terzi, come Carroll aveva già capito fin dagli inizi.